管理类专业学位硕士研究生入学统一考试

139 计划 · 数学篇

管理类联考 核心考案

适用于MBA、MPA、MPAcc、MEM

第一章 算 术

第一节 实数

知识讲解

（一）实数

实数包括有理数和无理数.

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{整数}\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{正整数}\\ \text{零}\end{array}\right\}\text{自然数}\\ \text{负整数}\end{array}\right.\\ \text{分数}\left\{\begin{array}{l}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{array}\right.\end{array}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\ \text{无理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{array}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

（二）整除

1. 数的整除

当整数 a 除以非零整数 b, 商正好是整数而无余数时，则称 a 能被 b 整除或 b 能整除 a. 如 $18\div 6=3$, 故 18 能被 6 整除.

2. 常见整除的特点

能被 2 整除的数：个位为 0, 2, 4, 6, 8.

能被 3 整除的数：各数位数字之和必能被 3 整除.

能被 5 整除的数：个位为 0 或 5.

能被 10 整除的数：个位必为 0.

3. 非整除

当整数 a 除以非零整数 b, 商为整数，但余数 r 不为 0 时，称为非整除. 其形式为：$\underset{\text{被除数}}{f}\div\underset{\text{除数}}{g}=\underset{\text{商}}{h}\cdots\underset{\text{余数}}{r}$, 如 $\underset{\text{被除数}}{20}\div\underset{\text{除数}}{3}=\underset{\text{商}}{3}\cdots\underset{\text{余数}}{2}$.

注意：要求余数小于除数. 当余数为 0 时，就变成整除了.

（三）公倍数与公约数

1. 公倍数

（1）公倍数：如果一个正整数 c 能被正整数 a 整除，又能被正整数 b 整除，则称 c 为 a 与 b 的公倍数.

（2）最小公倍数：a 与 b 公倍数中最小的一个，叫作它们的最小公倍数，记为$[a,b]$.

2. 公约数

（1）约数：a 能够整除 b，a 就是 b 的约数.

（2）公约数：如果一个正整数 c 既是正整数 a 的约数，又是正整数 b 的约数，那么 c 叫作 a 与 b 的公约数.

（3）最大公约数：两个数的公约数中最大的一个，叫作这两个数的最大公约数，记为(a,b).

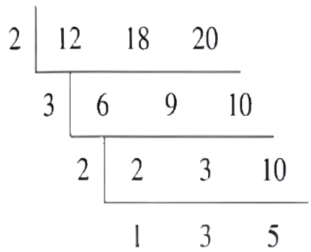
若$(a,b)=1$，则称 a 与 b 互质.

3. 公倍数与公约数的定理

两个正整数的乘积等于他们的最大公约数和最小公倍数的乘积，即 $ab=(a,b)\cdot[a,b]$.

4. 最小公倍数和最大公约数的求法

（1）短除法：先用这几个数的公因数去除这几个数，在得到的商中，再用其中几个数的公因数去除，依次进行下去，直到这几个商中每两个数都互质为止. 例如：求[12, 18, 20], 即[12, 18, 20]＝2×3×2×1×3×5 ＝180.



（2）分解质因数法

先把这几个数分解质因数，再把它们一切公有的质因数和其中几个数公有的质因数以及每个数独有的质因数全部连乘起来，所得的积就是它们的最小公倍数.

例如，求[12, 18, 20], 因为 12＝2×2×3, 18＝2×3×3, 20＝2×2×5, 其中三个数公有的质因数为 2, 两个数公有的质因数为 2 与 3, 每个数独有的质因数为 5 与 3，所以[12, 18, 20]＝2×2×3×3×5＝180.

（3）搭桥法

求多个自然数的最小公倍数，可以先求出其中两个数的最小公倍数，再求这个最小公倍数与第三个数的最小公倍数，依次求下去，直到最后一个为止. 最后所得的那个最小公倍数，就是所求的几个数的最小公倍数.

（四）奇数与偶数

1. 奇数： 不能被 2 整除的整数，可以表示为$2n+1$或$2n-1$. 其中，n为整数.

2. 偶数： 能被 2 整除的整数，可以表示为$2n$. 其中，n为整数.

3. 组合性质

奇数±奇数＝偶数	奇数×奇数＝奇数
奇数±偶数＝奇数	奇数×偶数＝偶数

偶数±偶数=偶数	偶数×偶数=偶数

注意：0 是偶数. 两个相邻整数必为一奇一偶.

【规律的逆用】

两个数加减完后得到是偶数，则这两个数必为同奇偶的.

两个相加或相减为奇数，则这两个数一奇一偶.

三个数相加减为偶数，则这三个数都是偶数或者两个奇数一个偶数.

三个相乘，它要是奇数，三个相乘奇数，它必须这每个数都得是奇数才可以.

三个整数相乘得到是偶数，说明至少有一个为偶数.

（五）质数与合数

1. 质数：如果一个大于 1 的正整数，只能被 1 和它本身整除，那么这个正整数叫作质数（或素数）. 如 2，3，5，7，…

2. 合数：如果一个大于 1 的正整数除了能被 1 和它本身整除外，还能被其他的正整数整除，这个正整数叫作合数（或复合数）. 如 4，6，8，9，…

3. 重要性质

1. 质数和合数都在正整数范围，且有无数多个. 1 既不是质数也不是合数.

2. 2 是唯一的既是质数又是偶数的整数，即是唯一的偶质数. 大于 2 的质数必为奇数. 质数中只有一个偶数 2，最小的质数为 2.

3. 最小的合数为 4. 任何合数都可以分解为两个或两个以上质数的积，且分解出来的数称为质因数. 能写成两个或两个以上质数的积的正整数就是合数.

4. 如果两个质数的和或差是奇数，那么其中必有一个是 2；如果两个质数的积是偶数，那么其中也必有一个是 2.

题型考法

【真题题型 1】无理数的计算

（一）解题思路

常用以下方法去掉题目所给式子的部分根号：

1. 通过配方变形公式：$m+n\pm 2\sqrt{mn}=(\sqrt{m}\pm\sqrt{n})^2$

2. 利用平方差公式进行根式有理化：$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$

【真题重现】（2023）$\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{3}=$【A】

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{6}$

D. $2\sqrt{2}$

E. $2\sqrt{3}$

【解析】根据题意，得：$\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{3}=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}-\sqrt{3}=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{2}$. 故选 A.

【模拟训练】$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2021}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2023}=$【B】

A. $5+2\sqrt{3}$

B. $5+2\sqrt{6}$

C. $5-2\sqrt{3}$

D. $5-\sqrt{6}$

E. $5-2\sqrt{6}$

【解析】$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2021}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2023}=\left[\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\right]^{2021}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

$=(3-2)^{2021}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=5+2\sqrt{6}$.

故选 B.

【真题题型 2】带余除法问题

（一）命题特点

一般题目会出现关键词“余数”，或结合实际背景，题干中有“剩余”表达。

（二）解题思路

1. 设 k 法：若 a 除以 b 余 r，可设 $a=bk+r$（$k\in Z$），再进行分析.

此外，要注意余数要小于除数.

2. 举反例法：在解条件充分性判断题目时，常用特值法举反例验证不充分.

（三）公式

1. 已知除数及余数，求被除数时：被除数＝除数×商＋余数

2. 已知被除数及余数，求除数或商时：被除数－余数＝除数×商

【真题重现】（2019）设 n 为正整数，则能确定 n 除以 5 的余数.【E】

（1）已知 n 除以 2 的余数.

（2）已知 n 除以 3 的余数.

【解析】

条件（1），举反例：当 n=7 时，7÷2=3…1，7÷5=1…2；当 n=13 时，13÷2=6…1，13÷5=2…3. 则不能确定 n 除以 5 的余数. 故条件（1）不充分.

条件（2），举反例：当 n=7 时，7÷3=2…1，7÷5=1…2；当 n=13 时，13÷3=4…1，13÷5=2…3. 则不能确定 n 除以 5 的余数. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合，举反例：当 n=7 时，7÷2=3…1，7÷3=2…1，7÷5=1…2；当 n=13 时，13÷2=6…1，13÷3=4…1，13÷5=2…3. 则不能确定 n 除以 5 的余数. 故条件（1）（2）联合起来也不充分.

综上，故选 E.

【模拟训练】已知 m 为正整数，则能确定 m 除以 4 余 1.【B】

（1）m 除以 2 余 1.

（2）m 除以 8 余 1.

【解析】

条件（1），举反例，令 $m=11$，11 除以 2 余 1，但 11 除以 4 的余数不是 1. 故条件（1）不充分.

条件（2），m 除以 8 余 1，设 $m=8k+1=4\cdot 2k+1$（$k\in N$），因为 $8k$ 能被 4 整除，所以 m 除以 4 余 1. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

【真题题型 3】运用公倍数与公约数解决实际问题

（一）命题特点

对于最小公倍数与最大公约数的计算，通常与实际问题相结合进行考查.

（二）解题思路

公约数的应用：对于长度、数量、重量不同的物品，进行等量分段时，需按照公约数进行分段.

公倍数的应用：比如植树问题、工序分配问题、物品分配问题.

【真题重现】（2017）将长、宽、高分别为 12，9 和 6 的长方体切割成正方体，且切割后无剩余，则能切割成相同正方体的最少个数为【C】

A. 3

B. 6

C. 24

D. 96

E. 648

【解析】

根据题意得，切割后无剩余，则切割后的正方体棱长越大，正方体数量越少，所以正方体最大棱长应为三个长方体棱长的最大公约数，12，9，6 的最大公约数为 3，则正方体的最大棱长为 3. 因而切割后的正方体体积为 $3\times3\times3=27$. 则 $12\times9\times6\div27=24$（个）. 故选 C.

【模拟训练】一块长方形铁皮，长 96 厘米，宽 80 厘米，要把它剪成同样大小的正方形且没有剩余，则至少可以剪成【D】

A. 12 块

B. 16 块

C. 20 块

D. 30 块

E. 36 块

【解析】

剪成同样大小的正方形且没有剩余，即剪成的正方形边长为 96 和 80 的公约数，要使正方形的块数尽量少，即求正方形的最大边长，即为 96 和 80 的最大公约数 16 厘米，故至少可以剪成正方形 $\frac{96}{16}\times\frac{80}{16}=30$ 块. 故选 D.

【真题题型 4】奇数与偶数

1. 奇数、偶数的组合

（一）命题特点

判断某个数（或代数式）的奇偶性. 常与整除问题、质数合数、整数不定方程等问题结合考查. 需要熟练运用奇数和偶数的四则运算规律.

（二）解题思路

根据奇数、偶数的组合性质进行分析判断.

1. A＋B＝C 型

由奇数±奇数＝偶数，奇数±偶数＝奇数，偶数±偶数＝偶数，可得：

（1）A 与 B 一奇一偶 $\Leftrightarrow$ C 为奇数；A 与 B 同奇同偶 $\Leftrightarrow$ C 为偶数.

（2）多个数相加减的整数中，如果有奇数个奇数，结果为奇数；如果有偶数个奇数，结果为偶数.

2. A·B＝C 型

由奇数×奇数＝奇数，奇数×偶数＝偶数，偶数×偶数＝偶数，可得：

（1）A 与 B 都是奇数 $\Leftrightarrow$ C 为奇数；A 与 B 之中有偶数 $\Leftrightarrow$ C 为偶数.

相邻的两个整数的乘积一定为偶数.

（2）多个数相乘的整数中，只要有偶数，结果必为偶数.

【口诀】奇偶运算规律：整数加减，同偶异奇；整数相乘，有偶则偶.

【真题重现】（2019）能确定小明的年龄.【C】

（1）小明的年龄是完全平方数.

（2）20 年后小明的年龄是完全平方数.

【解析】

完全平方数是指存在整数平方根的数，如——1、4、9、16、25、36、49、64、81、100 等等.

条件（1），举例：1，4，9，16，…等，无法确定小明的年龄.故条件（1）不充分.

条件（2），举例：25，36，49，64，…等，无法确定小明的年龄.故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合，设小明现在的年龄为x^2，20 年后的年龄为y^2.（x，$y \in Z_+$）

则$x^2+20=y^2$，整理得$y^2-x^2=20$

$\Rightarrow (y-x)(y+x)=20=1\times20=2\times10=4\times5$.

$\because y-x$ 与 $y+x$ 奇偶性相同.

$\therefore y-x$ 与 $y+x$ 只能同为偶数.

因此$\begin{cases} y-x=2 \\ y+x=10 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$.

即小明的年龄为$x^2=4^2=16$.故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

【模拟训练】能确定小红的年龄.【E】

（1）小红的年龄是完全平方数.

（2）24 年后小红的年龄是完全平方数.

【解析】

条件（1），小红的年龄是完全平方数，由于完全平方数不唯一，无法确定.故条件（1）不充分.

条件（2），由于大于 24 的完全平方数也不唯一，因此无法确定小红的年龄.故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合，现在小红的年龄是完全平方数，24 年后小红的年龄也是完全平方数，则能确定小红现在是 1 岁或 25 岁，24 年后是 25 岁或 49 岁.故条件（1）（2）联合不充分.

故选 E.

【真题题型 5】20 以内质数的应用

（一）命题特点

这类问题常单独考查，也常与整除问题、奇数偶数问题、代数式的化简求值问题、概率问

题等结合考查.需熟记 20 以内的质数、特殊质数 2 的性质，掌握利用奇偶性分析问题的方法.

（二）解题思路

1. 掌握常见的 20 以内的质数：2,3,5,7,11,13,17,19.

2. 穷举法： 使用穷举法时，常根据整除的特征、奇偶性等缩小穷举的范围.

3. 特殊数字突破法：

（1）数字“2”突破法：充分利用“2 是唯一的偶质数”进行解题.若偶数个质数的和是奇数，则其中必有一个是 2；若几个质数的积是偶数，则其中必有一个是 2.

（2）数字“5”突破法：若几个质数的乘积的个位数字是 0 或 5，则其中必有一个是 5.

【真题重现 1】(2021)设 p，q 是小于 10 的质数，则满足条件 $1<\frac{q}{p}<2$ 的 p，q 有____组.

【B】

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

E. 6

【解析】根据题意得：10 以内的质数有：2、3、5、7.

满足条件 $1<\frac{q}{p}<2$ 的情况有 $\frac{3}{2}$，$\frac{5}{3}$，$\frac{7}{5}$ 共 3 组.故选 B.

【真题重现 2】（2023）已知 m，n，p 是三个不同的质数，则能确定 m，n，p 乘积.【A】

（1）$m+n+p=16$.

（2）$m+n+p=20$.

【解析】

条件（1），$m+n+p=16$.

则这三个数中必是两奇一偶，唯一的偶质数是 2.

设 $m=2\Rightarrow n+p=14=3+11\Rightarrow m\cdot n\cdot p=2\times3\times11=66$.

即能确定 m，n，p 乘积.故条件（1）充分.

条件（2），$m+n+p=20$.

则这三个数中必是两奇一偶，唯一的偶质数是 2.

设 $m=2\Rightarrow n+p=18=5+13$ 或 $n+p=18=7+11$

$\Rightarrow m \cdot n \cdot p = 2\times5\times13 = 130$ 或 $m \cdot n \cdot p = 2\times7\times11 = 154$.

m，n，p 乘积的结果有两种.不能确定 m，n，p 乘积.

故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

【真题重现 3】（2020）从 1 至 10 这 10 个整数中任取 3 个数，恰有 1 个质数的概率是【B】

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{5}{12}$

D. $\frac{2}{5}$

E. $\frac{1}{120}$

【解析】10 以内的质数有：2，3，5，7.

故 10 以内的质数有 4 个，非质数有 6 个.

从 10 个整数中任取 3 个数的取法有 $C_{10}^3 = 120$（种）.

任取的 3 个数中恰有 1 个质数的取法有 $C_4^1 C_6^2 = 60$（种）.

则符合题意所求的概率是 $\frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}$. 故选 B.

【模拟训练 1】已知 p，q 都是质数，则能确定 $5p+3q+1$ 的值.【A】

（1）$p+5q=97$.

（2）$3p+2q=79$.

【解析】

条件（1），已知 $p+5q=97$，97 为奇数，则 p，q 中必定有一个为 2. 若 $q=2$，则 $p=87$ 为合数，不符合题意. 若 $p=2$，则 $q=19$，符合题意，所以 $5p+3q+1=68$. 故条件（1）充分.

条件（2），已知 $3p+2q=79$，p，q 有多组值均满足题意，则 $5p+3q+1$ 的值不唯一. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

【模拟训练 2】用 10 以内的质数组成一个无重复数字的三位数，使它能同时被 3 和 5 整除，这个数最小是 m，最大是 n，则 n－m 等于【A】

A. 360

B. 345

C. 330

D. 375

E. 390

【解析】10 以内的质数有：2，3，5，7；

能被 5 整除，个位上的数只能是 5；

能被 3 整除，这个三位数各数位之和必须是 3 的倍数，所以只能用 3 和 7.

故可以得到 m 是 375，n 是 735，所以 n－m＝360. 故选 A.

【真题题型 6】分解质因数

（一）命题特点

题干中常出现“将某数分解成若干质数之积”、“某数的质因数”的字眼，遇到这些字眼，常常是提醒我们分解质因数的信号.

分解质因数的题目一般不单独考查，而是常与其他题型相结合考查.

（二）解题思路

通过分解质因数进行分析求解.

【真题重现】（2022）一个自然数的各位数字都是 105 的质因数，且每个质因数至多出现一次，则这样的自然数有【D】

A. 6 个

B. 9 个

C. 12 个

D. 15 个

E. 27 个

【解析】根据题意可知 105＝3×5×7.

则 105 的质因数有 3、5、7 这三个数. 因为没有说明这个自然数是几位数. 因此可以分成以下三种情况：

①自然数为 1 位数：$A_3^1=3$ 种情况.

②自然数为 2 位数：$A_3^2=6$ 种情况.

③自然数为 3 位数：$A_3^3=6$ 种情况.

综上，满足题意的自然数共有 3＋6＋6＝15.

故选 D.

【模拟训练】将 210 分解为若干质数之积，则这些质数之和为【A】

A. 17

B. 18

C. 19

D. 20

E. 21

【解析】210 可以分解为 $2\times3\times5\times7$，故 $2+3+5+7=17$. 故选 A.

第二节 比与比例

知识讲解

1.**比例**：相等的比称为比例，记作 a:b＝c:d 或 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. 其中 a 和 d 称为**比例外项**，b 和 c 称为**比例内项**.

2.**比例中项**

当 a:b＝b:d 时，称 b 为 a 和 d 的**比例中项**，显然当 a,b,d 均为正数时，b 是 a 和 d 的几何平均值（$b=\sqrt{ad}$）.

3.**比例的基本性质**

（1）a:b＝c:d→ad＝bc.

（2）a:b＝b:d→b^2＝ad.

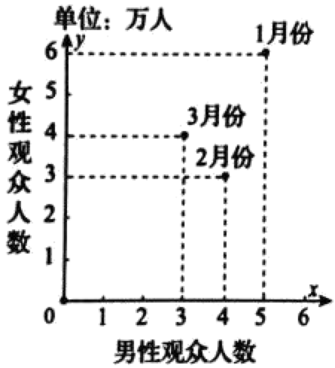
题型考法

【真题题型 1】比例的简单计算

（一）解题思路

根据两个或多个比例关系列等式，进行求解分析，常与应用题相结合考查.

【真题重现】（2019）某影城统计了一季度的观众人数，如图所示，则一季度的男、女观众人数之比为【C】



A.3∶4

B.5∶6

C.12∶13

D.13∶12

E.4∶3

【解析】根据图意得：一月份：男 5 万，女 6 万.二月份：男 4 万，女 3 万.三月份：男 3 万，女 4 万.

则可得，一季度：男观众人数为 5+4+3=12 万人；女观众人数为 6+3+4=13 万人.
因此，一季度的男、女观众人数之比为 12∶13. 故选 C.

【模拟训练】甲数的$\frac{3}{4}$等于乙数的$\frac{5}{6}$（甲数与乙数均不为 0），则甲数与乙数的的比是【B】

A. 9∶10

B. 10∶9

C. 7∶9

D. 8∶7

E. 9∶7

【解析】由题意可得：甲数×$\frac{3}{4}$=乙数×$\frac{5}{6}$，则甲数∶乙数=$\frac{5}{6}$∶$\frac{3}{4}$=10∶9. 故选 B.

【真题题型 2】比例的化简

（一）命题特点

题目给出一个比例关系，再对一个代数式化简求值.

（二）解题思路

1. 通法：可以**设比例系数**k进行求解.

2. 巧法：可以**取特殊值**进行求解，适用于求的结果与k无关.

【真题重现】（2015）若实数 a，b，c 满足 a∶b∶c=1∶2∶5，且 a+b+c=24，则$a^2+b^2+c^2=$【E】

A. 30

B. 90

C. 120

D. 240

E. 270

【解析】根据题意，设 a=k，b=2k，c=5k.

∵a+b+c=k+2k+5k=8k=24.

∴k=3.

因此，$a^2+b^2+c^2=k^2+(2k)^2+(5k)^2=k^2+4k^2+25k^2=30k^2=30\times3^2=30\times9=270$.

故选 E.

【模拟训练】若$a:b=\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$，则$\frac{12a+16b}{12a-8b}=$【C】

A. 2

B. 3

C. 4

D. −3

E. -2

【解析】由于$a:b=\frac{1}{3}:\frac{1}{4}=4:3$，可令$a=4k$，$b=3k$.

代入题干得到$\frac{12a+16b}{12a-8b}=4$.

故选 C.

第三节 数据描述

知识讲解

1. 平均数

（1）**算术平均**：设 n 个数x_1，x_2，…，x_n，称$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$为这 n 个数的算术平均值，简记为：$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$.

（2）**加权平均**：设 n 个数x_1，x_2，…，x_n的权分别是w_1，w_2，…，w_n，称$\bar{x}=\frac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$为这 n 个数的加权平均值.（$w_1+w_2+\cdots+w_n=n$）

2. **众数**：一组数据中出现次数最多的数据叫做这组数据的众数.

3. **中位数**：将一组数据按大小依次排列，把处在最中间位置的一个数据（或最中间两个数据的平均数）叫做这组数据的中位数.

4. 方差

（1）定义：设 n 个数x_1，x_2，…，x_n，那么方差为：

$$S^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$$

（2）意义：方差是反映一组数据的整体波动大小的指标，它是指一组数据中各数据与这组数据的平均数的差的平方的平均数，它反映的是一组数据偏离平均值的情况.

5. 极差

（1）定义：极差＝最大值－最小值.

（2）意义：用来反映一组数据变化范围的大小. 只对极端值较为敏感，而不能表示其他更多的意义.

题型考法

【真题题型 1】计算一组数的算术平均值

（一）命题特点

题目通过列举、表格等形式给出了具体数据，常与求方差结合.

（二）解题思路

直接将数据代入公式：$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$进行求解.

快速求解技巧：若一组数据成等差数列，则平均值为等差中项，即$\bar{x}=\frac{a_1+a_n}{2}$.

【真题重现】（2018）为了解公司员工的年龄结构，按男、女人数的比例进行随机抽样，结果如下：

男员工年龄（岁）	23	26	28	30	32	34	36	38	41
女员工年龄（岁）	23	25	27	27	29	31			

根据表中数据估计，该公司男员工的平均年龄与全体员工的平均年龄分别是____.（单位：岁）【A】

A. 32，30

B. 32，29.5

C. 32，27

D. 30，27

E. 29.5，27

【解析】根据题意，

男员工的平均年龄为$\bar{x}_{男}=\frac{23+26+28+30+32+34+36+38+41}{9}=32$（岁）.

全体员工的平均年龄为$\bar{x}_{全体员工}=\frac{23+25+27+27+29+31+9\times 32}{15}=30$（岁）.

【真题重现】（2017）在 1 到 100 之间，能被 9 整除的整数的平均值是【D】

A. 27

B. 36

C. 45

D. 54

E. 63

【解析】根据题意得，$100\div 9=11\cdots 1$.

由整除的周期性得 100 以内能被 9 整除的数共有 11 个.这些数构成以 9 为首项，99 为末项的等差数列.

法一：

∵等差数列求和公式可得：总和$=\frac{(9+99)\times 11}{2}$.

∴平均值$=\frac{(9+99)\times 11}{2\times 11}=54$.

法二：

这些数构成以 9 为首项，99 为末项的等差数列.

所以$\bar{x}=\frac{a_1+a_n}{2}=\frac{(9+99)}{2}=54$.

故选 D.

【模拟训练】

某公司有 10 名销售员，2022 年完成的销售情况如下表 9—1：

销售额/万元	3	4	5	6	7	8	10
销售员人数	1	3	2	1	1	1	1

根据提供的信息，销售额平均数是____（万元）.【B】

A. 5. 5

B. 5. 6

C. 4. 6

D. 4. 5

E. 4. 4

【解析】

平均数：$\bar{x}=(3\times1+4\times3+5\times2+6\times1+7\times1+8\times1+10\times1)\times\frac{1}{10}=5.6$（万元）. 所以平均数是 5. 6（万元）.

综上，故选 B.

【真题题型 2】计算加权平均值

（一）命题特点

题目通过公式、比例等形式给出各部分的权重与数值.

（二）解题思路

直接代入公式 $\bar{x}=\dfrac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$ 进行求解.

若已知各部分的平均值及数量之比，则利用加权平均求出整体的平均值.

【真题重现】（2020）一项考试的总成绩由甲、乙、丙三部分组成：总成绩＝甲成绩×30%＋乙成绩×20%＋丙成绩×50%. 考试通过的标准是：每部分≥50 分，且总成绩≥60 分. 已知某人甲成绩 70 分，乙成绩 75 分，且通过了这项考试，则此人丙成绩的分数至少是【B】

A. 48

B. 50

C. 55

D. 60

E. 62

【解析】设此人丙成绩的分数为 x，则其通过该项考试必须满足：

$\begin{cases}x\ge 50\\ 70\times30\%+75\times20\%+50\%x\ge 60\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 50\\ x\ge 48\end{cases}\Rightarrow x\geqslant 50$. 即此人丙成绩的分数至少是 50 分. 故选 B.

【模拟训练】甲、乙、丙、丁四种材料的价格分别为 5 元、6 元、7 元、8 元，若将甲种材料 8 斤、乙种材料 4 斤、丙种材料 6 斤、丁种材料 2 斤混合到一起，则售价应定为每斤____元.【C】

A. 4. 4

B. 5. 8

C. 6. 1

D. 7. 5

E. 8. 6

【解析】

根据题意得，售价应定为 $\frac{5\times8+6\times4+7\times6+8\times2}{8+4+6+2}=6.1$（元/斤）. 故选 C.

【真题题型 3】数据个数增减后对均值的影响

（一）解题思路

增减单个数据时，将此数据与原数据的平均值进行比较来确定变动后对整体均值的影响；增减多个数据时，将这多个数据的平均值与原数据的平均值进行比较来确定变动后对整体均值的影响。具体如下：

（1）增加数据

①增加的数据（的平均值）＜原数据的平均值：数据增加后，剩余数据的整体均值减小.

②增加的数据（的平均值）＞原数据的平均值：数据增加后，剩余数据的整体均值增加.

（2）减少数据

①减少的数据（的平均值）＜原数据的平均值：数据减少后，剩余数据的整体均值增大.

②减少的数据（的平均值）＞原数据的平均值：数据减少后，剩余数据的整体均值减少.

【真题重现】（2023）跳水比赛中，裁判给某选手的一个动作打分，其平均值为 8.6，方差为 1.1，若去掉一个最高分 9.7 和一个最低分 7.3，则剩余得分的【E】

A. 平均值变小，方差变大

B. 平均值变小，方差变小

C. 平均值变小，方差不变

D. 平均值变大，方差变大

E. 平均值变大，方差变小

【解析】

∵去掉的分数的平均值为 $(9.7+7.3)\div2=8.5<8.6$，低于原数据的平均值.

∴剩余得分的平均值变大.

∵去掉最高分和最低分之后，数据波动性变小.

∴剩余得分的方差变小.

综上所述，故选 E.

【真题重现】（2021）某班增加两名同学，则该班同学的平均身高增加了.【C】

（1）增加的两名同学的平均身高与原来男同学的平均身高相同.

（2）原来男同学的平均身高大于女同学的平均身高.

【解析】

条件（1），增加的两名同学的平均身高与原来男同学的平均身高相同，但是不清楚女生的平均身高.故条件（1）不充分.

条件（2），原来男同学的平均身高大于女同学的平均身高，但是未说明增加两名同学的平均身高情况.故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

平均身高＝（男同学平均身高＋女同学平均身高）÷（男同学人数＋女同学人数）.

条件（1）（2）联合得：男同学平均身高＞女同学平均身高，增加了两名同学的平均身高＝原来男同学的平均身高，所以增加的两名同学的平均身高＞班级原平均身高.

即增加了两名同学后，该班同学的平均身高增加了.故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

【真题题型 4】数据个数不变，数据的值变化后对均值影响

（一）解题思路

可通过计算部分数据变化后对整体数值的影响来判断，若部分数据的总变动为正，其会增加总体值，因此在数据个数不变时，均值会增加.

若给出了变动前后整体的每一个数据的具体值，也可根据所给的数据直接通过计算变动前后的均值进行比较来判断.

【真题重现】（2019）某校理学院五个系每年的录取人数如下表：

系别	数学系	物理系	化学系	生物系	地学系
录取人数	60	120	90	60	30

今年与去年相比，物理系的录取平均分没变，则理学院的录取平均分升高了.【C】

（1）数学系的录取平均分升高了 3 分，生物系的录取平均分降低了 2 分.

（2）化学系的录取平均分升高了 1 分，地学系的录取平均分降低了 4 分.

【解析】

条件（1），根据条件，不能得到化学系和地学系的录取平均分数的变化，无法判断理学院的录取平均分数的变化.故条件（1）不充分.

条件（2），根据条件，不能得到数学系和生物系的录取平均分数的变化，无法判断理学院的录取平均分数的变化.故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合有，数学系总分提高了 $60\times3=180$（分）；物理系的录取平均分没变；

化学系总分提高了 90×1=90（分）；生物系总分降低了 60×2=120（分）；地学系总分降低了 30×4=120（分）.

即理学院总的录取分数变化为 60×3+120×0+90×1−60×2−30×4=30（分）.

因此，理学院总分提高了，其录取平均分必然提高.故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

【模拟训练】某排球队 6 名上场队员的身高（单位：cm）是：180，184，188，190，192，194.现用一名新队员换下场上的一名队员.则与换人前相比，场上队员的身高平均数变小.【A】

（1）现用一名身高为 186 cm 的队员换下场上身高为 192 cm 的队员.

（2）现用一名身高为 196 cm 的队员换下场上身高为 190 cm 的队员.

【解析】

根据题意，原数据的平均数为(180+184+188+190+192+194)÷6=188(cm).

条件(1)，新数据的平均数为(180+184+188+190+186+194)÷6=187(cm)<188(cm).则与换人前相比，场上队员的身高平均数变小.故条件（1）充分.

条件(2)，新数据的平均数为(180+184+188+196+192+194)÷6=189(cm)>188(cm).则与换人前相比，场上队员的身高平均数变大.故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

【真题题型 5】计算一组数的方差

（一）命题特点

题目通过列举、表格等形式给出具体数据.

（二）解题思路

直接将数据代入公式：$S^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$进行求解.

【真题重现】（2017）甲、乙、丙三人每轮各投篮 10 次，投了三轮.投中数如下表：

	第一轮	第二轮	第三轮
甲	2	5	8
乙	5	2	5
丙	8	4	9

记σ_1，σ_2，σ_3分别为甲、乙、丙投中数的方差，则【B】

A. $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$

B. $\sigma_1>\sigma_3>\sigma_2$

C. $\sigma_2>\sigma_1>\sigma_3$

D. $\sigma_2>\sigma_3>\sigma_1$

E. $\sigma_3>\sigma_2>\sigma_1$

【解析】

①求甲、乙、丙三人的平均值.

甲的平均值为$\frac{2+5+8}{3}=5$.乙的平均值为$\frac{5+2+5}{3}=4$.丙的平均值为$\frac{8+4+9}{3}=7$.

②求甲、乙、丙三人的方差.

$\sigma_1=\frac{1}{3}\times[(2-5)^2+(5-5)^2+(8-5)^2]=6$.

$\sigma_2=\frac{1}{3}\times[(5-4)^2+(2-4)^2+(5-4)^2]=2$.

$\sigma_3=\frac{1}{3}\times[(8-7)^2+(4-7)^2+(9-7)^2]=\frac{14}{3}$.

因此，$\sigma_1>\sigma_3>\sigma_2$.故选B.

【模拟训练】这组数据的方差是3.5.【B】

（1）若一组数据是10，6，14，13，16，5，10，6.

（2）若一组数据是110，109，111，112，113，108，110，107.

【解析】

条件（1），$\bar{x}=(10+6+14+13+16+5+10+6)\times\frac{1}{8}=10$.

$S^2=[(10-10)^2+(6-10)^2+(14-10)^2+(13-10)^2+(16-10)^2+(5-10)^2$

$+(10-10)^2+(6-10)^2]\times\frac{1}{8}=14.75$.故条件（1）不充分.

条件（2），$\bar{x}=(110+109+111+112+113+108+110+107)\times\frac{1}{8}=110$.

$S^2=[(110-110)^2+(109-110)^2+(111-110)^2+(112-110)^2+(113-110)^2$

$+(108-110)^2+(110-110)^2+(107-110)^2]\times\frac{1}{8}=3.5$.故条件（2）充分.

综上，故选B.

【真题题型 6】数据变动后对方差的影响

（一）解题思路

1.利用方差的意义：由于方差是反映一组数据的整体波动大小的指标，其反映的是一组数据偏离平均值的情况.方差越大，数据的波动越大；方差越小，数据的波动越小.因此可通过数据变动前后的波动性大小变化来判断.

2.直接计算比较变动前后的方差.

【快速比较方差大小的方法】

（1）若题干画出了数据的图像（如散点图、折线图），则可通过直接观察图像来判断数据的波动性大小.

（2）可通过极差来判断方差的大小，极差大的数据波动大，方差就大；极差小的，数据波动小，方差就小.

（3）比较新数据与原数据距离均值的大小，越接近均值的数据的方差越小，若新数据比原数据更靠近均值，则数据变动后的方差变小.

【真题重现】（2023）跳水比赛中，裁判给某选手的一个动作打分，其平均值为 8.6，方差为 1.1，若去掉一个最高分 9.7 和一个最低分 7.3，则剩余得分的【E】

A. 平均值变小，方差变大

B. 平均值变小，方差变小

C. 平均值变小，方差不变

D. 平均值变大，方差变大

E. 平均值变大，方差变小

【解析】

∵去掉的分数的平均值为(9.7＋7.3)÷2＝8.5＜8.6，低于原数据的平均值. ∴剩余得分的平均值变大.

∵去掉最高分和最低分之后，极差变小，数据波动性变小.

∴剩余得分的方差变小.

综上所述，故选 E.

【模拟训练】某排球队 6 名上场队员的身高（单位：cm）是：180，184，188，190，192，194. 现用身高为 186 cm 的队员换下场上身高为 192 cm 的队员，则与换人前相比，场上队员的身高【B】

A. 平均值变小，方差变大

B. 平均值变小，方差变小

C. 平均值变小，方差不变

D. 平均值变大，方差变大

E. 平均值变大，方差变小

【解析】

法一：

原数据的平均数为：(180＋184＋188＋190＋192＋194)÷6＝188(cm).

换人后的平均数为：(180＋184＋188＋190＋186＋194)÷6＝187(cm)＜188(cm). 则与换人前相比，场上队员的身高平均数变小.

原数据的方差为：$\frac{1}{6}\times(8^2+4^2+2^2+4^2+6^2)=\frac{68}{3}$.

换人后的方差为：$\frac{1}{6}\times(7^2+3^2+1^2+3^2+1^2+7^2)=\frac{59}{3}<\frac{68}{3}$.

则与换人前相比，场上队员的身高方差变小.

综上，故选 B.

法二：

因为 186<192，显然换人后平均值变小.

原均值为 188，显然与 192 相比，186 更接近平均值，故将 192 换成 186 后，数据整体波动变小，即方差变小. 故选 B.

【真题题型 7】极差的计算与意义

（一）解题思路

通过计算极差来分析数据.

【真题重现】（2020）某人在同一观众群体中调查了对五部电影的看法，得到如下数据：

电影	第一部	第二部	第三部	第四部	第五部
好评率	0.25	0.5	0.3	0.8	0.4
差评率	0.75	0.5	0.7	0.2	0.6

据此数据，观众意见分歧最大的前两部电影依次是【C】

A. 第一部、第三部

B. 第二部、第三部

C. 第二部、第五部

D. 第四部、第一部

E. 第四部、第二部

【解析】极差＝最大值－最小值. 极差越小，观众的意见争议（分歧）也就越大. 极差越大，观众的意见争议（分歧）也就越小.

根据题意得，这五部电影的极差的绝对值依次为 0.5，0，0.4，0.6，0.2.

所以观众对这五部电影的意见分歧由大到小为：第二部、第五部、第三部、第一部、第四部，即观众意见分歧最大的前两部电影依次是第二部、第五部. 故选 C.

【模拟训练】小童收集某地 2022 年十月国庆假期间（7 天）每日最高温度的数据，则这组数据的极差是 26.【D】

（1）1 日 33℃、2 日 38℃、3 日 38℃、4 日 17℃、5 日 12℃、6 日 12℃、7 日 18℃.

（2）1 日 24℃、2 日 26℃、3 日 32℃、4 日 33℃、5 日 23℃、6 日 7℃、7 日 15℃.

【解析】

条件（1），每日最高温度按从小到大的顺序排列为 12，12，17，18，33，38，38. 极差＝最大值－最小值＝38－12＝26. 故条件（1）充分.

条件（2），每日最高温度按从小到大的顺序排列为 7，15，23，24，26，32，33. 极差＝最大值－最小值＝33－7＝26. 故条件（2）充分.

综上，故选 D.

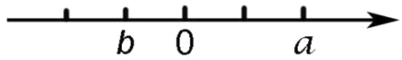
第四节 数轴与绝对值

知识讲解

（一）数轴与绝对值

1. 数轴

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫数轴. 数轴上的点与实数一一对应，也可以用数轴来比较两个实数的大小.



（1）数轴的三要素：原点、正方向和单位长度.

（2）在数轴上表示两个数的点，右边的点表示的数大（0 右边的数是正数），左边的点表示的数小（0 左边的数是负数）.

2. 绝对值

（1）代数意义

$$|a|=\begin{cases} a & a>0 \\ 0 & a=0 \\ -a & a<0 \end{cases}$$

（2）几何意义

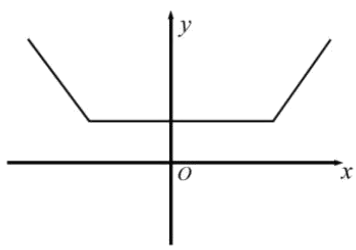
$|a|$ 表示在数轴上 a 点与原点 0 的距离.

$|a-b|$ 表示在数轴上 a 点与 b 点之间的距离.

$|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 表示在数轴上 x 点到 a 点、b 点与 c 点的距离之和.

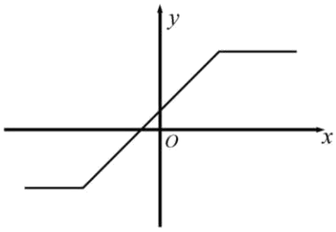
（3）常见图像

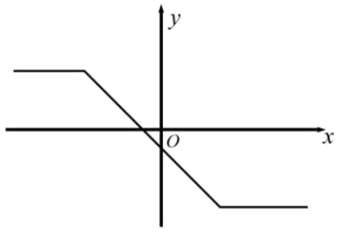
①平底锅型：$f(x)=|x-a|+|x-b|$，表示在数轴上 x 点到 a 点与 b 点的距离之和. 此种函数表达式，没有最大值，只有最小值. 且在两个零点之间取得最小值 $|a-b|$. 图像的表现为两头高，中间平，类似于平底锅.



②“Z”字型：$f(x)=|x-a|-|x-b|$，表示在数轴上 x 点到 a 点与 b 点的距离之差. 此种函数

表达式，既有最大值也有最小值，分别在零点的两侧取得且两个最值为$\pm|a-b|$. 图像的表现为两头平，中间斜.





（二）绝对值三角不等式

1. 基本公式

$$\big||a|-|b|\big| \le |a\pm b| \le |a|+|b|$$

（1）形式 1：$\big||a|-|b|\big| \le |a+b| \le |a|+|b|$

其左边等号的成立条件为：$ab\le 0$，右边等号的成立条件为：$ab\ge 0$

（2）形式 2：$\big||a|-|b|\big| \le |a-b| \le |a|+|b|$

其左边等号的成立条件为：$ab\ge 0$，右边等号的成立条件为：$ab\le 0$

【口诀】三角不等式的取等条件

中间相加取等号，左异右同零取到；

中间相减取等号，上面符号方向调.

题型考法

【真题题型 1】绝对值的意义

（一）命题特点

题干给出几个含有绝对值的方程、不等式，再将一个代数式化简求值，常以条件充分性判断题的形式考查.

（二）解题思路

1. 特值验证法，通常是通过代入满足条件的特殊值得到与题干矛盾的结论来说明条件不充分.

2. 平方法、分类讨论法去绝对值符号.

3. 利用绝对值的几何意义，结合数轴进行分析.

4. 图像法.

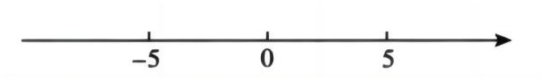
【真题重现】（2017）已知 a，b，c 为三个实数. 则 $\min\{|a-b|，|b-c|，|a-c|\}\leqslant 5$.【A】

（1）$|a|\leqslant 5$，$|b|\leqslant 5$，$|c|\leqslant 5$.

（2）a＋b＋c＝15.

【解析】

条件（1），由绝对值的几何意义可知，$|a-b|$在数轴上表示a，b两点的距离，$|b-c|$在数轴上表示b,c两点的距离，$|a-c|$在数轴上表示a,c两点的距离．根据$|a|\leqslant 5,|b|\leqslant 5,|c|\leqslant 5$，则 a，b，c 均为$[-5，5]$上的点．根据数轴可以看出，$a$，$b$，$c$任意两个实数之间的最大距离为 10．且 a，b，c 三点间距离最大时，有 a＝－5，b＝0，c＝5.



此时$\min\{|a-b|，|b-c|，|a-c|\}=5$,那么在其他所有情况下必然有$\min\{|a-b|，|b-c|，|a-c|\}\leqslant 5$．故条件（1）充分.

（也可举反例进行说明：设a，b，c大小关系为 a≤b≤c．假设 a 到 b 的距离大于 5，b 到 c 的距离大于 5．那么 a 到 c 的距离大于 10．与 a，b，c 任意两个实数之间的最大距离为 10 相矛盾．所以所举例子不成立．即$\min\{|a-b|，|b-c|，|a-c|\}\leqslant 5$.）

条件（2），已知 a＋b＋c＝15．举例：当 a＝－3，b＝6，c＝12 时，满足 a＋b＋c＝15，则$\min\{|a-b|，|b-c|，|a-c|\}=\min\{9，6，15\}=6$与$\min\{|a-b|，|b-c|，|a-c|\}\leqslant 5$相矛盾．故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

【模拟训练】|x－1|＋|x－2|的最小值为【B】

A. 0

B. 1

C. 2

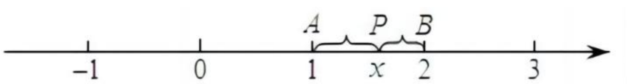
D. 3

E. 4

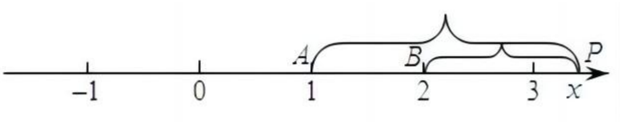
【解析】

在数轴，设 A、B、P 三点对应的数分别是 1、2、x.

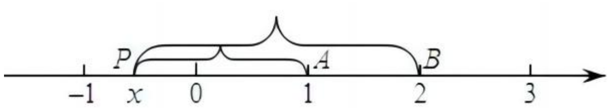
当 1≤x≤2 时，即 P 点在线段 AB 上，此时|x－1|＋|x－2|＝|PA|＋|PB|＝|AB|＝1；



当 x＞2 时，即 P 点在 B 点右侧，此时|x－1|＋|x－2|＝|PA|＋|PB|＝|AB|＋2|PB|＞|AB|；



当 $x<1$ 时，即 P 点在 A 点左侧，此时 $|x-1|+|x-2|=|PA|+|PB|=|AB|+2|PA|>|AB|$；



综上，当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时(P 点在线段 AB 上)，$|x-1|+|x-2|$取得最小值为 1.

故选 B.

【真题题型 2】绝对值三角不等式

（一）命题特点

利用三角不等式的取等条件解方程或不等式.

（二）解题思路

1. 先通过代数式之间的和、差关系，分辨三角不等式的形式；

2. 根据题目条件求出取等号（或小于号）的条件，小于号成立的条件即为等号成立条件的反面.

【真题重现】（2021）设 a，b 为实数，则能确定$|a|+|b|$的值.【C】

（1）已知$|a+b|$的值.

（2）已知$|a-b|$的值.

【解析】

条件（1），已知$|a+b|$的值，取特值分析.

①当 $a=1$，$b=-1$ 时，$|a+b|=0$，$|a|+|b|=2$.

②当 $a=2$，$b=-2$ 时，$|a+b|=0$，$|a|+|b|=4$.

故条件（1）不充分.

条件（2），已知$|a-b|$的值，取特值分析.

①当 $a=1$，$b=1$ 时，$|a-b|=0$，$|a|+|b|=2$.

②当 $a=2$，$b=2$ 时，$|a-b|=0$，$|a|+|b|=4$.

故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

法一：绝对值三角不等式法.

由绝对值三角不等式，得式①：$|a+b|\leqslant|a|+|b|$，式②：$|a-b|\leqslant|a|+|b|$.

当 $ab\geqslant 0$ 时，式①取到等号，即$|a|+|b|=|a+b|$，由条件（1）知为定值.

当 $ab\leqslant 0$ 时，式②取到等号，即$|a|+|b|=|a-b|$，由条件（2）知为定值.

故两个条件联立起来可确定$|a|+|b|$的值.故条件（1）（2）联合起来充分.

法二：去绝对值法.

设$|a+b|=k$，$|a-b|=m$，去绝对值得：

$$\begin{cases}a+b=k\\a-b=m\end{cases}或\begin{cases}a+b=k\\a-b=-m\end{cases}或\begin{cases}a+b=-k\\a-b=m\end{cases}或\begin{cases}a+b=-k\\a-b=-m\end{cases}$$

但不管是哪一组解，最终的结果都是$|a|+|b|=\frac{|k+m|}{2}+\frac{|k-m|}{2}$，结果为定值，故两个条件联立充分.

综上，故选C.

【模拟训练】$|2x-3|-|x+2|=|3x-1|$.【D】

（1）$-2\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$

（2）$-3\leqslant x\leqslant\frac{1}{4}$

【解析】

由题干$|2x-3|-|x+2|=|3x-1|$，等价转化为$|2x-3||=|3x-1|+|x+2|$，然后根据$|a|+|b|=|a-b|$，成立条件为$ab\leq0$，则有$(3x-1)(x+2)\leq0$，得到$-2\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$.

条件（1）：$-2\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$，其范围非$-2\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$的子集.故条件（1）不充分.

条件（2）：$-3\leqslant x\leqslant\frac{1}{4}$，其范围非$-2\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$的子集.故条件（2）不充分.

联合条件（1），（2），得$-2\leqslant x\leqslant\frac{1}{4}$，其是$-2\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$的子集.

故条件（1）（2）联合起来充分.

故选D.

第二章 整式、分式与函数

第一节 整式与分式

知识点讲解

1. 基本公式

平方差公式	$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
完全平方公式	$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$
三个数和的平方	$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
	$a^2+b^2+c^2\pm ab\pm bc\pm ca=\frac{1}{2}\left[(a\pm b)^2+(b\pm c)^2+(c\pm a)^2\right]$
立方和（差）公式	$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$
和与差的立方公式	$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$
配方公式	$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

2. 因式定理（整除）

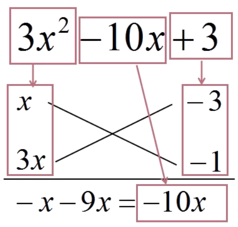
$f(x)$ 含有 $(ax-b)$ 因式$\Leftrightarrow f(x)$ 能被 $(ax-b)$ 整除$\Leftrightarrow f(\frac{b}{a})=0$.

3. 余式定理（非整除）

多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 的余式为 $f(a)$. 推论：多项式 $f(x)$ 除以 $(ax-b)$ 的余式为 $f(\frac{b}{a})$，此外，被除式＝除式×商＋余式.

4. 十字相乘因式分解法： 用于分解 $abx^2+(bp+aq)x+pq$ 型的式子。分解后，$abx^2+(bp+aq)x+pq=(ax+p)(bx+q)$. 其一般步骤为竖分二次项与常数项，交叉相乘和相加，检验确定，横写因式.

【口诀】：拆两头，凑中间，横写因式不能乱.



$$3x^2-10x+3=(x-3)(3x-1)$$

4. 分式的性质

分式基本性质	性质		分式的分子与分母都乘以（或除以）同一个不为零的整式，分式的值不变
	表示		$\frac{A}{B}=\frac{AM}{BM}$，$\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}$（$M$ 为不等于零的整式）
	应用	符号法则	分子、分母与分式本身的符号，改变其中任何两个，分式的值不变 $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$，$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$
		约分	把一个分式的分子与分母的所有公因式约去叫作约分
		通分	把几个异分母的分式分别化成与原本的分式相等的同分母的分式叫作通分

5. 分式的运算（表格内分母均不为 0）

分式运算	加减法则	同分母：同分母的分式相加减，把分式的分子相加减，分母不变 $\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$
		异分母：异分母的分式相加减，先通分变为同分母的分式，然后再加减 $\frac{a}{c}\pm\frac{b}{d}=\frac{ad\pm bc}{cd}$
	乘法法则	分式乘以分式：用分子的积做积的分子，分母的积做积的分母 $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$
	除法法则	分式除以分式：把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘 $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$
	乘方法则与繁分式	分式的乘方：把分式的分子、分母各自乘方 $(\frac{a}{b})^n=\frac{a^n}{b^n}$ 繁分式的运算： 1. 可以利用除法法则进行运算 2. 可以用分式的基本性质化简繁分式（繁分式：分子或分母本身至少有一个是分式）

题型考法

【真题题型 1】代数式的化简求值

（一）命题特点

根据已知表达式，对代数式进行化简求值。

（二）解题思路

1. 代数式常用变形方式：等式两边同时乘除某式子、同时平方；分式上下同时乘除某式、同时取倒数等。

2. 公式法：牢记并灵活使用平方差公式、完全平方公式、立方和（差）公式、和与差的立方公式等，利用这些公式对题目所给式子进行化简求解.

3. 因式分解法

4. 特值验证法：尤其适合解代数式求值类题目和在条件充分性判断题中验证条件不充分。

【真题重现 1】（2018）设实数 a，b 满足$|a-b|=2$，$|a^3-b^3|=26$，则$a^2+b^2=$【E】

A. 30

B. 22

C. 15

D. 13

E. 10

【解析】

$\because |a-b|=2 \Rightarrow (a-b)^2=4$.

$\therefore$ 当 $a>b$ 时，$a-b=2$，则$|a^3-b^3|=a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)[(a-b)^2+3ab]=2\times(4+3ab)=26$. 解得：$ab=3$.

当 $a<b$ 时，$b-a=2$，则$|a^3-b^3|=b^3-a^3=(b-a)(b^2+ab+a^2)=(b-a)[(b-a)^2+3ab]=2\times(4+3ab)=26$. 解得：$ab=3$.

综上所述，$a^2+b^2=a^2+b^2-2ab+2ab=(a-b)^2+2ab=4+2\times3=10$. 故选 E.

【模拟训练 1】已知$ab>0$，则能确定$|a+b|$的值.【C】

（1）已知a^2+b^2的值.

（2）已知$a-b$的值.

【解析】$|a+b|=\sqrt{(a+b)^2}=\sqrt{a^2+2ab+b^2}$.

条件（1），已知a^2+b^2的值，但不知道$2ab$的值，求不出$|a+b|$的值，故条件（1）不充分.

条件（2），已知$a-b$的值，则已知$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$的值，但求不出$a^2+2ab+b^2$的值，故条件（2）不充分.

联立条件（1），条件（2），已知a^2+b^2的值和$a-b$的值，由于

$a^2+b^2-(a-b)^2=a^2+b^2-(a^2-2ab+b^2)=2ab$，故能求出$2ab$的值，且$a^2+2ab+b^2>0$，则能确定$|a+b|$的值.故条件（1），（2）联立充分.

故选 C.

【模拟训练 2】已知$(x+2y)^2=40$, $xy=2$，则$(x-2y)^2=$【D】

A. 36

B. 32

C. 30

D. 24

E. 22

【解析】$(x+2y)^2=x^2+2\cdot x\cdot 2y+(2y)^2=x^2+4xy+4y^2$,

$(x-2y)^2=x^2-2\cdot x\cdot(2y)+(2y)^2=x^2-4xy+4y^2$,

所以$(x-2y)^2=(x+2y)^2-8ry=40-16=24$. 故选 D.

【真题重现 2】（2018）设 m，n 是正整数，则能确定 m+n 的值.【D】

（1）$\frac{1}{m}+\frac{3}{n}=1$.

（2）$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=1$.

【解析】

条件（1），$\frac{1}{m}+\frac{3}{n}=1\Rightarrow mn-n-3m=0\Rightarrow n(m-1)-3m=0$.

根据因式分解可知：$n(m-1)-3m+3-3=0\Rightarrow n(m-1)-3(m-1)-3=0\Rightarrow(m-1)(n-3)=3$.

∵m，n 是正整数.

∴则有$\begin{cases}m_1-1=1\\n_1-3=3\end{cases}$或$\begin{cases}m_2-1=3\\n_2-3=1\end{cases}\Rightarrow$解得$\begin{cases}m_1=2\\n_1=6\end{cases}$或$\begin{cases}m_2=4\\n_2=4\end{cases}$.

$m_1+n_1=8$或$m_2+n_2=8\Rightarrow m+n=8$. 即 m+n 的值确定. 故条件（1）充分.

条件（2），$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=1\Rightarrow mn-n-2m=0\Rightarrow n(m-1)-2m=0$.

根据因式分解可知：$n(m-1)-2m+2-2=0\Rightarrow n(m-1)-2(m-1)-2=0\Rightarrow(m-1)(n-2)=2$.

∵m，n 是正整数.

∴则有$\begin{cases}m_1-1=1\\n_1-2=2\end{cases}$或$\begin{cases}m_2-1=2\\n_2-2=1\end{cases}\Rightarrow$解得$\begin{cases}m_1=2\\n_1=4\end{cases}$或$\begin{cases}m_2=3\\n_2=3\end{cases}$.

$m_1+n_1=6$或$m_2+n_2=6\Rightarrow m+n=6$. 即 m+n 的值确定. 故条件（2）充分.

综上，故选 D.

【模拟训练 3】已知a,b均为非零实数，则能确定$\frac{b-a}{b+a}$的值.【E】

（1）$a^2+3ab-10b^2=0$.

（2）$a>b$.

【解析】

条件（1），将$a^2+3ab-10b^2=0$因式分解，有：

$a^3+3ab-10b^2=(a-2b)(a+5b)=0$，解得$a=2b$或$a=-5b$，所以原式$\frac{b-2b}{b+2b}=-\frac{1}{3}$或$\frac{b-(-5b)}{b-5b}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$，有两个解，所以条件（1）不充分.

条件（2），已知$a>b$，不能确定a,b的具体值，所以条件（2）不充分.

联立条件（1），（2），有$a=2b$或$a=-5b$且$a>b$.

若$ab>0$，则$a=2b$，此时原式$\frac{b-2b}{b+2b}=-\frac{1}{3}$.

若$ab<0$，则$a=-5b$，此时原式$\frac{b-(-5b)}{b-5b}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$.

两个解均成立，故$\frac{b-a}{b+a}$的值仍无法唯一确定，故两个条件联立也不充分.

故选 E.

【真题重现 3】（2015）已知 p，q 为非零实数，则能确定$\frac{p}{q(p-1)}$的值.【B】

（1）$p+q=1$.

（2）$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

【解析】

条件（1），$p+q=1\Rightarrow q=1-p$. 则$\frac{p}{q(p-1)}=\frac{p}{(1-p)(p-1)}=-\frac{p}{(1-p)^2}$. 因为 p 为非零实数，可任意取值，所以$-\frac{p}{(1-p)^2}$的值不固定. 即不能确定$\frac{p}{q(p-1)}$的值. 故条件（1）不充分.

条件（2），$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\Rightarrow\frac{q+p}{pq}=1\Rightarrow q+p=pq$. 则$\frac{p}{q(p-1)}=\frac{p}{pq-q}=\frac{p}{q+p-q}=1$. 则能确定$\frac{p}{q(p-1)}$的值. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

【模拟训练 4】若 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y}$，则 $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$ 的值为【C】

A. 0

B. 1

C. －1

D. 2

E. －2

【解析】$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{y+x}{xy}=\frac{1}{x+y}\Rightarrow(x+y)^2=xy\Rightarrow x^2+y^2+2xy=xy\Rightarrow x^2+y^2=-xy$

$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{y^2+x^2}{xy}=\frac{-xy}{xy}=-1$，故选 C.

【真题题型 2】代数式的化简求最值

（一）命题特点

题目要求含有多个未知数的代数式的最大值或最小值.

（二）解题思路

常考公式：

1. $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=\frac{1}{2}\left[(a\pm b)^2+(b\pm c)^2+(a\pm c)^2\right]\geq 0$，

则有 $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$.

2. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)\geq 3(ab+bc+ac)$.

所以在解题中可尝试将题目所给式子化成上述公式中的形式.

【真题重现】（2022）设 x，y 为实数，则 $f(x,y)=x^2+4xy+5y^2-2y+2$ 的最小值为【A】

A. 1

B. $\frac{1}{2}$

C. 2

D. $\frac{3}{2}$

E. 3

【解析】根据题意得 $f(x,y)=x^2+4xy+5y^2-2y+2=(x^2+4xy+4y^2)+(y^2-2y+1)+1$

$=(x+2y)^2+(y-1)^2+1$.

$\because (x+2y)^2\geqslant 0$，$(y-1)^2\geqslant 0$.

$\therefore f(x，y)==(x+2y)^2+(y-1)^2+1\geqslant 1$.

当 $(x+2y)^2=0$，$(y-1)^2=0$ 时，$f(x，y)$取最小值⇒最小值为 1.

故选 A.

【模拟训练 1】若实数 a，b，c 满足：$a^2+b^2+c^2=10$，则代数式 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ 的最大值是【B】

A. 28

B. 30

C. 36

D. 38

E. 40

【解析】$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2)-(2ab+2bc+2ac)=20-[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)]=30-(a+b+c)^2\leqslant 30$,

当 $a+b+c=0$ 时，有最大值 30. 故选 B.

【模拟训练 2】若 x,y,z 为实数，设 $A=x^2-2y+\frac{\pi}{2}$，$B=y^2-2z+\frac{\pi}{3}$，$C=z^2-2x+\frac{\pi}{6}$，则在 A，B，C 中【A】

A. 至少有一个大于零

B. 至少有一个小于零

C. 都大于零

D. 都小于零

E. 至少有两个大于零

【解析】$A+B+C=x^2-2x+1+y^2-2y+1+Z^2-2z+1+\pi-3$

$=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(\pi-3)>0$,

则 A,B,C 至少有一个大于零. 故选 A.

【真题题型 3】已知 $x+\frac{1}{x}=a$，求代数式的值.

（一）命题特点

该类题目常见的考察形式为：已知 $x+\frac{1}{x}=a$，求形如 $x^2+\frac{1}{x^2}$，$x^3+\frac{1}{x^3}$ 等分式的值.

（二）解题思路

利用乘法公式将 $x+\frac{1}{x}$ 升次，或者将未知分式因式分解降次，即可求解. 具体如下：

$x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$；

$x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})(x^2+\frac{1}{x^2}-1)$；

$(x-\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2=(x+\frac{1}{x})^2-4$.

【真题重现】（2020）已知实数 x 满足 $x^2+\frac{1}{x^2}-3x-\frac{3}{x}+2=0$，则 $x^3+\frac{1}{x^3}=$【C】

A. 12

B. 15

C. 18

D. 24

E. 27

【解析】

$$x^2+\frac{1}{x^2}-3x-\frac{3}{x}+2=0\Rightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=0\Rightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)=0.$$

解得：$x+\frac{1}{x}=0$（舍去）或 $x+\frac{1}{x}=3$.

因此，$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\right]=3\times(3^2-3)=18$. 故选 C.

【模拟训练】若 x 为非零实数，则 $x^6+\frac{1}{x^6}=322$.【D】

（1）$x+\frac{1}{x}=3$.

（2）$x+\frac{1}{x}=-3$.

【解析】

设 $x+\frac{1}{x}=a$，则 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=a^2-2$，$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=\left(a^2-2\right)^2-2$.

$$x^6+\frac{1}{x^6}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^4+\frac{1}{x^4}-1\right)=\left(a^2-2\right)\left[\left(a^2-2\right)^2-2-1\right]$$

条件（1），将 $a=3$ 代入上式得 $x^6+\frac{1}{x^6}=(9-2)\left[(9-2)^2-2-1\right]=322$. 故条件（1）充分.

条件（2），将 $a=-3$ 代入上式得 $x^6+\frac{1}{x^6}=(9-2)\left[(9-2)^2-2-1\right]=322$. 故条件（2）充分.

综上，故选 D.

【真题题型 4】裂项相消计算分式

（一）命题特点

题目要求多个项加总的和，且这些项之间有如下特征：

1. 分子全部相同，最简单形式为都是 1 的，复杂形式可为都是 a(a 为任意自然数)的，但是只要将 a 提取出来即可转化为分子都是 1 的运算.

2. 分母上相邻 2 个分母上的因数“首尾相接”.

（二）解题思路

先将算式中的项进行拆分，拆成两个或多个数字单位的和或差，且拆分后的项可以前后抵消，这样在求和时能够“抵消”多数的项而剩余少数几项，从而达到化简的目的。

（三）常见公式

1. $\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$

2. $\frac{1}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}}=\frac{1}{k}\left(\sqrt{n+k}-\sqrt{n}\right)$

3. $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x+1)(x+2)}\right]$

【真题重现 1】(2013) 已知 $f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\cdots+\frac{1}{(x+9)(x+10)}$，则 $f(8)$ =【E】

A. $\frac{1}{9}$

B. $\frac{1}{10}$

C. $\frac{1}{16}$

D. $\frac{1}{17}$

E. $\frac{1}{18}$

【解析】

根据计算公式得：$f(x)=\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{(x+2)}+\frac{1}{(x+2)}-\frac{1}{(x+3)}+\cdots+\frac{1}{(x+9)}-\frac{1}{(x+10)}=\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{(x+10)}$.

则 $f(8)=\frac{1}{(8+1)}-\frac{1}{(8+10)}=\frac{1}{9}-\frac{1}{18}=\frac{1}{18}$. 故选 E.

【真题重现 2】（2021）$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=$【A】

A. 9

B. 10

C. 11

D. $3\sqrt{11}-1$

E. $3\sqrt{11}$

【解析】

$\because \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

$\therefore$ 原式$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+...+\sqrt{100}-\sqrt{99}=-1+\sqrt{100}=-1+10=9$. 故选 A.

【模拟训练 1】$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdot\cdot\cdot+\frac{1}{17\times19}=$【B】

A. $\frac{18}{19}$

B. $\frac{9}{19}$

C. $\frac{8}{19}$

D. $\frac{7}{19}$

E. $\frac{6}{19}$

【解析】

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdot\cdot\cdot+\frac{1}{17\times19}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{17}\right)+\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{15}-\frac{1}{17}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{19}\right)=\frac{9}{19}.$$ 故选 B.

【模拟训练 2】$(\frac{2}{1+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{2}{\sqrt{1011}+\sqrt{1012}})\times(1+\sqrt{1012})=$【E】

A. 1012

B. 1011

C. 2024

D. 2023

E. 2022

【解析】

$$(\frac{2}{1+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{2}{\sqrt{1011}+\sqrt{1012}})\times(1+\sqrt{1012})$$

$$=2\times(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{1012}-\sqrt{1011})\times(\sqrt{1012}+1)$$

$$=2\times(\sqrt{1012}+1)\times(\sqrt{1012}-1)=2022.$$

故选 E.

第二节 集合与函数

知识点讲解

（一）集合

1. 集合的关系与运算

子集	如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记为 A ⊆B 或 B⊇A，读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”．
集合相等	若 A⊆B，且 B⊆A，则称 A＝B.
真子集	若 A⊆B 且 A≠B，则称 A 是 B 的真子集，记作 A⊊ B（或 B⊋ A）．
空集	空集是任何集合的子集；空集是任何非空集合的真子集.（∅ ）
交集	由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的交集，记作 A∩B.
并集	由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的并集，记作 A∪B.
补集	对于集合 U，若集合 A⊆U，那么由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 U 中子集 A 的补集（或余集），记作$C_U A$或$\overline{A}$.
注意：由n个元素所组成的集合，其子集的个数为2^n个，真子集的个数为2^n-1个，非空子集的个数为2^n-1个，非空真子集的个数为2^n-2个.	

（二）函数

1. 分段函数：有些函数，对于其定义域内的自变量x的不同值，不能用一个统一的解析式表示，而是要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为分段函数. 分段函数表示不同的取值范围对应不同的表达式.

2. 绝对值函数：形如$y=|f(x)|$.

3. 最值函数

（1）max 表示最大值函数. 比如$\max\{x，y，z\}$表示x，y，z中最大的数.

（2）min 表示最小值函数. 比如 $\min\{x, y, z\}$ 表示 x，y，z 中最小的数.

题型考法

【真题题型 1】集合的性质、关系与运算

（一）命题特点

题目中会给出多个集合以及这些集合之间的关系，需要根据集合之间的关系求解相关问题. 常与函数、方程、不等式等结合考查.

【真题重现】(2020) 设集合 $A=\{x||x-a|<1, x\in R\}$，$B=\{x||x-b|<2, x\in R\}$，则 $A\subset B$ 的充分必要条件是【A】

A. $|a-b|\leqslant 1$

B. $|a-b|\geqslant 1$

C. $|a-b|<1$

D. $|a-b|>1$

E. $|a-b|=1$

【解析】

先解出集合 $A=\{x||x-a|<1, x\in R\}=\{x|a-1<x<a+1, x\in R\}$.

再解出集合 $B=\{x||x-b|<2, x\in R\}=\{x|b-2<x<b+2, x\in R\}$.

$\because A\subset B$ 表示集合 A 是集合 B 的子集.

$\therefore \begin{cases} b-2\le a-1 \\ a+1\le b+2 \end{cases} \Rightarrow -1\leqslant a-b\leqslant 1$. 即 $|a-b|\leqslant 1$.

故选 A.

【模拟训练】$A\cap B=[0, 3]$. 【C】

（1）集合 $A=\{y\,|\,y=\sqrt{x}\}$.

（2）集合 $B=\{x\,|-3\le x\le 3\}$.

【解析】

条件（1），只知道集合 A，无法计算结果. 故条件（1）不充分.

条件（2），只知道集合 B，无法计算结果. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

集合 A：$\because \sqrt{x}\geqslant 0$. $\therefore$ 集合 $A=[0, +\infty)$.

集合 B：∵ $-3\leqslant x\leqslant 3$. ∴集合 $B=[-3,3]$.

则 $A\cap B=[0,3]$. 故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

【真题题型 2】绝对值函数

（一）解题思路

1.数形结合法

对于形如 $y=|f(x)|$ 型的绝对值函数，做题时常用数形结合的方法，可以先画出 $y=f(x)$ 的图像，再将图像位于 x 轴下方的部分翻到 x 轴上方从而得到 $y=|f(x)|$ 的图像.

2.分类讨论去绝对值法

通过对 x 的取值范围进行分类讨论的方法去掉函数中的绝对值，将绝对值函数化为分段函数.

【真题重现】（2021）函数 $f(x)=x^2-4x-2|x-2|$ 的最小值为【B】

A. -4

B. -5

C. -6

D. -7

E. -8

【解析】

方法一：分类讨论.

①当 $x-2\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2-6x+4$，$f(3)_{\min}=-5$.

②当 $x-2<0$ 时，$f(x)=x^2-2x-4$，$f(1)_{\min}=-5$.

方法二：根据题意得，$f(x)=x^2-4x-2|x-2|=(x^2-4x+4)-2|x-2|-4=(x-2)^2-2|x-2|-4=|x-2|^2-2|x-2|-4=(|x-2|^2-2|x-2|+1)-5=(|x-2|-1)^2-5\geqslant -5$. 因此 $f(x)$ 的最小值为 -5.

故选 B.

【模拟训练】已知 $g(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$，$f(x)=|x-1|-g(x)|1+x|+|x-2|+|x+2|$，则 $f(x)$ 是与 x 无关的常数.【D】

（1）$-1<x<0$.

（2）$1<x<2$.

【解析】

条件（1），$-1<x<0$，此时 $g(x)=-1$，$f(x)$ 去掉绝对值符号得：

$f(x)=|x-1|+|1+x|+|x-2|+|x+2|=-(x-1)+1+x-(x-2)+x+2=6$，可见 $f(x)$ 是与 x 无关的常数 6. 故条件（1）充分.

条件（2），$1<x<2$，此时 $g(x)=1$，$f(x)$ 去掉绝对值符号得：

$f(x)=|x-1|-|1+x|+|x-2|+|x+2|=x-1-(1+x)-(x-2)+x+2=2$，可见 $f(x)$ 是与 x 无关的常数 2. 故条件（2）充分.

综上，故选 D.

【真题题型 3】最值函数

（一）命题特点

题目给出某一最值函数的表达式，考查其函数性态.

（二）解题思路

遇到最值函数题目，如果函数表达式较为简单，一般采用图像法. 故需掌握常见函数的图像，如一次函数、二次函数等.

对于最大值函数图像，先分别画出各个函数的图像，然后取图像位于上方的部分。对于最小值函数图像，先分别画出各个函数的图像，然后取图像位于下方的部分。

【真题重现】（2018）函数 $f(x)=\max\{x^2，-x^2+8\}$的最小值为【E】

A. 8

B. 7

C. 6

D. 5

E. 4

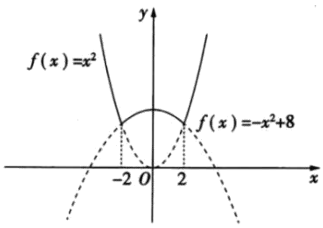
【解析】

根据题意，设$x^2=-x^2+8\Rightarrow x^2=4$. 解得：$x_1=2$，$x_2=-2$. 则有：

当 $x>2$ 或 $x<-2$ 时，$f(x)=x^2$.

当 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f(x)=-x^2+8$.

即 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<-2 \\ -x^2+8 & -2\le x\le 2 \\ x^2 & x>2 \end{cases}$. 根据函数画图，如图所示.



因而在分界点取得最小值，即 $x=\pm2$ 时，$f(x)$最小值$=x^2=-x^2+8=4$. 故选 E.

【模拟训练】已知 x 为实数，则 $f(x)=\min\{2x+4, x^2+1, 5-3x\}$，则 $f(x)$ 的最大值是【B】

A. 0

B. 2

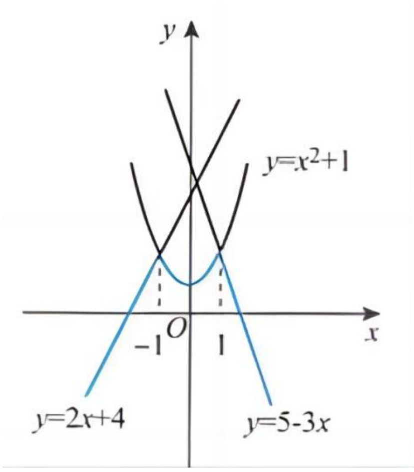
C. 4

D. 6

E. 8

【解析】

分别画出 $2x+4$，x^2+1，$5-3x$ 的图像，如下图所示.



$f(x)=\min\{2x+4, x^2+1, 5-3x\}$所表示的图像为下侧区域，即图中的蓝色部分. 故当 $x=\pm1$ 时取得最大值 2. 故选 B.

第三节 一元二次函数，方程

知识点讲解

（一）一元二次函数

1.一元二次函数的三种形式

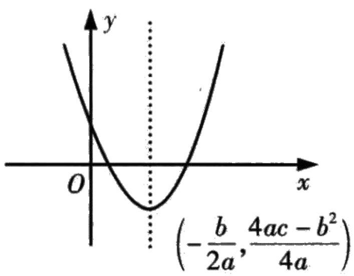
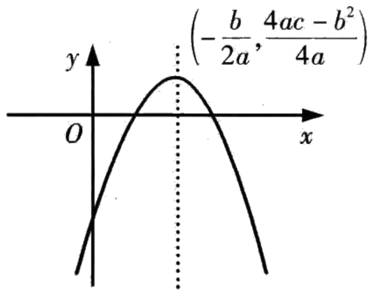
（1）标准式：$y=ax^2+bx+c$.

（2）配方式：$y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

（3）零点式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$.

【注】x_1和x_2表示一元二次函数与 x 轴的两个交点，或方程的两个根.

2.图像与性质

$y=ax^2+bx+c$		
二次项系数	$a>0$	$a<0$
开口方向	开口向上	开口向下
图像		
对称轴	$x=-\dfrac{b}{2a}$	
单调性	在$x\le-\dfrac{b}{2a}$上单调递减 在$x>-\dfrac{b}{2a}$上单调递增	在$x\le-\dfrac{b}{2a}$上单调递增 在$x>-\dfrac{b}{2a}$上单调递减
最值	当$x=-\dfrac{b}{2a}$时，$y_{最小值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	当$x=-\dfrac{b}{2a}$时，$y_{最大值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

（二）一元二次方程

1.概念

只含一个未知数，且未知数的最高次数是 2，且系数不为 0 的方程，称为一元二次方程.

其一般形式为$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$.

2.一元二次方程根的判别式与求根公式： $\Delta=b^2-4ac$

（1）当$\Delta>0$时，方程有两个不等实根x_1，$x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

（2）当$\Delta=0$时，方程有两个相等实根$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.

（3）当$\Delta<0$时，方程无实根.

3.根与系数的关系（韦达定理）： $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$.

5.韦达定理的扩展应用

（1）$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\dfrac{b}{c}$

（2）$\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}=\dfrac{b^2-2ac}{c^2}$

（3）$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{4c}{a}}=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$

（4）$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\dfrac{b^2-2ac}{a^2}$

（5）$x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$

题型考法

【真题题型 1】解一元二次方程

（一）命题特点

解一元二次方程一般不单独考查，而是在解代数式、函数、应用题的过程中会涉及相关运算. 因此需熟练掌握一元二次方程的求解方法.

（二）解题思路

1.十字相乘因式分解法（首选方法）

2.配方法：通过配方凑出形如$a(x-m)^2+n=0$的形式.（$a\neq 0$，$\Delta\geq 0$）

3.求根公式法（通用方法）： x_1，$x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

【真题重现】（2022）已知 a，b 为实数，则能确定 $\frac{a}{b}$ 的值.【E】

（1）a，b，a＋b 成等比数列.

（2）$a(a+b)>0$.

【解析】

条件（1），a，b，a＋b 成等比数列⇒ $b^2=a(a+b)\Rightarrow b^2=a^2+ab$，两边同时除以$b^2$：$1=(\frac{a}{b})^2+\frac{a}{b}$. 令 $\frac{a}{b}=t$，原方程可化简为：$t^2+t-1=0$.

解得：$t_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $t_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$，$\frac{a}{b}$ 的值不唯一. 即不能确定 $\frac{a}{b}$ 的值. 故条件（1）不充分.

条件（2），$a(a+b)>0$，只能得出 a 与 a＋b 为同号，无法确定 $\frac{a}{b}$ 的值. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合后，无法判断 a 与 b 是否同号，仍然无法确定 $\frac{a}{b}$ 的值. 故条件（1）（2）联合起来也不充分.

综上，故选 E.

【模拟训练】一元二次方程$x^2+bx+c=0$ 的两个根之差的绝对值为 4.【D】

（1）$b=4$，$c=0$.

（2）$b^2-4c=16$.

【解析】

条件（1），若 $b=4$，$c=0$，解得此时方程的根为 0 和－4，两根之差的绝对值为 4，故条件（1）充分.

条件（2），$\Delta=b^2-4c=16$，根据求根公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{16}}{2\times1}=\frac{-b\pm4}{2}$，两根之差的绝对值为 $\frac{-b+4-(-b-4)}{2}=4$，故条件（2）充分.

综上，故选 D.

【真题题型 2】一元二次函数图像与性质

（一）解题思路

主要观察图像的开口方向、对称轴、与 x 轴的交点及 y 轴的交点.

【真题重现】（2021）设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，且 $f(2)=f(0)$，则 $\frac{f(3)-f(2)}{f(2)-f(1)}=$【B】

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

E. 6

【解析】

方法一：根据 f(2)=f(0)，则对称轴为 x=1，二次函数顶点式可以写成：$f(x)=a(x-1)^2+m$.

$$\frac{f(3)-f(2)}{f(2)-f(1)}=\frac{a(3-1)^2+m-[a(2-1)^2+m]}{a(2-1)^2+m-[a(1-1)^2+m]}=\frac{3a}{a}=3.$$

方法二：根据 f(2)=f(0)，则有 $4a+2b+c=c\Rightarrow b=-2a$.

$\frac{f(3)-f(2)}{f(2)-f(1)}=\frac{9a+3b+c-(4a+2b+c)}{4a+2b+c-(a+b+c)}=\frac{5a+b}{3a+b}$. 将 $b=-2a$ 代入得：$\frac{5a-2a}{3a-2a}=\frac{3a}{a}=3$.

故选 B.

【模拟训练 1】若 $A(-7,\ y_1)$，$B(-3,\ y_2)$，$C(0,\ y_3)$ 为抛物线 $y=x^2+4x-5$ 上的三个点，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是【B】

A. $y_1<y_2<y_3$

B. $y_2<y_3<y_1$

C. $y_3<y_1<y_2$

D. $y_1<y_3<y_2$

E. 以上答案均不正确

【解析】可知二次函数开口向上，对称轴为 $x=-2$，此时函数取最小值，因此离对称轴越远，函数值越大，A 点：$|-7-(-2)|=5$；B 点：$|-3-(-2)|=1$；C 点：$|0-(-2)|=2$，因此，$y_2<y_3<y_1$. 故选 B.

【模拟训练 2】设二次函数 $y=ax^2+bx+c$，当 $x=-2$ 时，函数有最大值a^2，且图像经过点（$-1,6$），则$\frac{a+c}{b}=$【C】

A. $\frac{1}{6}$

B. $-\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

E. $\frac{1}{2}$或$\frac{7}{4}$

【解析】

由题可得，函数对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}=-2$，最值$\frac{4ac-b^2}{4a}=a^2$，过点$(-1,6)$，即 $a-b+c=6$.

联立解得 $a=-3$，$b=-12$，$c=-3$ 或 $a=2$，$b=8$，$c=12$.

因为函数有最大值，故 $a<0$，即 $a=-3$，$b=-12$，$c=-3$.

故$\frac{a+c}{b}=\frac{-3-3}{-12}=\frac{1}{2}$. 故选 C.

【真题题型 3】一元二次函数与一次函数交点问题

（一）解题思路

1. **数形结合：**根据几何意义画出图像，判断两函数图像的位置关系.

2. **二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与一次函数 $y=kx+m$ 的交点情况：**

令函数值相等，得到新的一元二次方程 $ax^2+bx+c-kx-m=0$，根据新的方程可得如下结论：

<table>
<tr><th>交点情况</th><th>数字特征</th></tr>
<tr><td>有两个交点</td><td>新的一元二次方程$\Delta>0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">有一个交点</td><td>一次函数图像与二次函数相切，新的一元二次方程$\Delta=0$. 特别地，在顶点处相切时，$k=0$，一次函数为平行于x轴的直线.</td></tr>
<tr><td>一次函数垂直于x轴，k不存在.</td></tr>
<tr><td>没有交点</td><td>新的一元二次方程$\Delta<0$</td></tr>
</table>

【真题重现 1】（2017）直线 $y=ax+b$ 与抛物线 $y=x^2$有两个交点.【B】

（1）$a^2>4b$.

（2）$b>0$.

【解析】

根据题意，联立方程组$\begin{cases} y=ax+b \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2-ax-b=0$.

∵直线与抛物线有两个交点.

∴$\Delta=a^2+4b>0$.

条件（1），$a^2>4b \Rightarrow a^2-4b>0$ 与上述结论$a^2+4b>0$ 相矛盾.故条件（1）不充分.

条件（2），$\because a^2\geqslant 0$ 且 $b>0\Rightarrow \Delta=a^2+4b>0$，与上述结论$a^2+4b>0$ 相一致.故条件（2）充分.

综上，故选 B.

【真题重现 2】（2024）设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+1$，则能确定 $a<b$.【C】

(1) 曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称

(2) 曲线 $f(x)$ 与 $y=2$ 相切

【解析】

条件(1)，由曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，得对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}=1$，即 $b=-2a$，无法推出 $a<b$.故条件（1）不充分.

条件(2)，由曲线 $f(x)$ 与 $y=2$ 相切，因为 $y=2$ 为平行于 x 轴的直线，故只有 $y=2$ 过曲线 $f(x)$ 的顶点时二者才相切，所以曲线 $f(x)$ 顶点纵坐标为 2，即 $2=\dfrac{4a-b^2}{4a}$，即 $b^2=-4a$. 因为 $b^2\geq 0$，所以 $a\leq 0$. 又因为 $f(x)$ 为二次函数，$a\neq 0$，所以 $a<0$. 所以有 $a<0\leq b^2$，无法推出 $a<b$.所以条件（2）不充分.

联合条件（1）、（2），可得$\begin{cases} b=-2a \\ b^2=-4a \end{cases}$，解得$\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$，故 $a<b$.故（1）、（2）联合充分.

故选 C.

【模拟训练 1】函数 $y=x^2-1$ 与 $y=kx-b$ 的图像有两个交点.【C】

（1）$k+b=0$.

（2）$kb=0$.

【解析】

联立两个函数表达式，可得$\begin{cases} y=x^2-1 \\ y=kx-b \end{cases}$，解得$x^2-kx+b-1=0$.

$\because$ 直线与抛物线有两个交点.

$\therefore \Delta=k^2-4(b-1)>0$.

条件（1），$k+b=0$，即 $k=-b$，则$\Delta=k^2-4(b-1)=b^2-4b+4=(b-2)^2\geqslant 0$，故条件（1）不充分.

条件（2），举反例，当 $k=0$，$b>1$ 时，$\Delta=k^2-4(b-1)=-4(b-1)<0$，故条

件（2）不充分.

联立条件（1）、（2），可得 $k=b=0$，则$\Delta=k^2-4(b-1)=4>0$，结论成立. 故条件（1）、（2）联立充分.

故选 C.

【模拟训练 2】已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+1$，则能确定 a，b 的值.【C】

（1）曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴相切.

（2）曲线 $y=f(x)$ 的对称轴为 $x=1$.

【解析】

条件（1），$\Delta=b^2-4a=0$，即$b^2=4a$，不能确定 a，b 的值，故条件（1）不充分.

条件（2），对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}=1$，即 $b=-2a$，不能确定 a，b 的值，故条件（2）不充分.

联立条件（1）（2），则 $f(1)=a+b+1=0$，且 $b=-2a$，求得 $a=1$，$b=-2$，故联合条件（1），（2）充分.

综上，故选 C.

【真题题型 4】根的个数问题

（一）命题特点

题目给出某个一元二次方程的根的个数的情况，求参数范围.

（二）解题思路

通过判别式判断方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根的情况：

方程根的情况	两个不等实根	两个相等实根	无实根
函数图像与 x 轴的交点	两个交点	一个交点	无交点
成立条件	$\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta=b^2-4ac>0\end{cases}$	$\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta=b^2-4ac=0\end{cases}$	$\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta=b^2-4ac<0\end{cases}$

【真题重现 1】（2019）关于 x 的方程$x^2+ax+b-1=0$ 有实根.【D】

（1）$a+b=0$.

（2）$a-b=0$.

【解析】

根据题意得，方程有实根，即$\Delta\geqslant 0\Rightarrow\Delta=a^2-4(b-1)=a^2-4b+4\geqslant 0$.

条件（1），a＋b＝0，则 b＝－a. 则$\Delta=a^2-4b+4=a^2+4a+4=(a+2)^2\geqslant0$，方程有实根. 故条件（1）充分.

条件（2），a－b＝0，则 a＝b. 则$\Delta=a^2-4b+4=a^2-4a+4=(a-2)^2\geqslant0$，方程有实根. 故条件（2）充分.

综上，故选 D.

【真题重现 2】（2012）一元二次方程$x^2+bx+1=0$有两个不同实根.【D】

（1）$b<-2$.

（2）$b>2$.

【解析】

根据题意，一元二次方程$x^2+bx+1=0$有两个不同实根⇒$\Delta>0$.

$\Delta=b^2-4\times1\times1=b^2-4>0\Rightarrow b^2>4\Rightarrow b>2$ 或 $b<-2$.

条件（1），$b<-2$，符合上述结论 $b>2$ 或 $b<-2\Rightarrow\Delta>0$，即一元二次方程$x^2+bx+1=0$有两个不同实根. 故条件（1）充分.

条件（2），$b>2$，符合上述结论 $b>2$ 或 $b<-2\Rightarrow\Delta>0$，即一元二次方程$x^2+bx+1=0$有两个不同实根. 故条件（2）充分.

综上，故选 D.

【模拟训练】已知关于x的一元二次方程$(k-2)^2x^2+(2k+1)x+1=0$有两个不相等的实数根，则k的取值范围是【C】

A. $k>\frac{3}{4}$

B. $k\geqslant\frac{3}{4}$

C. $k>\frac{3}{4}$且$k\neq2$

D. $k\geqslant\frac{3}{4}$且$k\neq2$

E. $k<\frac{3}{4}$

【解析】

已知方程是一元二次方程，因此二次项系数$(k-2)^2\neq0$，即$k\neq2$.

又因为方程有两个不相等的实数根，即$\Delta=(2k+1)^2-4(k-2)^2>0$，解得$k>\frac{3}{4}$.

综上，$k>\frac{3}{4}$且$k\neq2$. 故选 C.

【真题题型 5】根的分布问题

（一）命题特点

题目特征为根据一元二次方程的根的分布情况求相应参数的取值范围.

（二）解题思路

数形结合：画出抛物线图像，根据与 x 轴的交点位置来分析，注意不要用韦达定理分析.

【真题重现 1】（2020）设函数 $f(x)=(ax-1)(x-4)$，则在 $x=4$ 左侧附近有 $f(x)<0$.【A】

（1）$a>\frac{1}{4}$.

（2）$a<4$.

【解析】

条件（1），$a>\frac{1}{4}$，此时函数 $f(x)$ 为二次函数，函数开口向上，有两个零点 $x=4$ 和 $x=\frac{1}{a}$.

又∵ $\frac{1}{a}<4$.

∴在 $x=4$ 的左侧附近有 $f(x)<0$. 故条件（1）充分.

条件（2），$a<4$. 举反例，当 $a=0$ 时，则 $f(x)=-(x-4)=4-x$，则在 $x=4$ 的左侧附近有 $f(x)>0$. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

【真题重现 2】（2016）已知 $f(x)=x^2+ax+b$，则 $0\leqslant f(1)\leqslant 1$.【D】

（1）$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 中有两个零点.

（2）$f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 中有两个零点.

【解析】

$f(x)=x^2+ax+b=(x+\frac{a}{2})^2+b-\frac{a^2}{4}$. $f(x)$ 的抛物线图像开口向上，对称轴 $x=-\frac{a}{2}$.

条件（1），$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 中有两个零点 $\Rightarrow 0\leqslant -\frac{a}{2}\leqslant 1$.

∵ $f(x)$ 有两个实数根.

∴ $\Delta=a^2-4b\geqslant 0\Rightarrow b\leqslant \frac{a^2}{4}$.

则 $f(1)=1+a+b\leqslant a+\frac{a^2}{4}+1=(1+\frac{a}{2})^2$.

∵ $0\leqslant -\frac{a}{2}\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant \frac{a}{2}\leqslant 0\Rightarrow 0\leqslant 1+\frac{a}{2}\leqslant 1\Rightarrow 0\leqslant (1+\frac{a}{2})^2\leqslant 1$.

∴ $0\leqslant f(1)\leqslant 1$. 即与题干结论一致. 故条件（1）充分.

条件（2），$f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 中有两个零点 $\Rightarrow 1\leqslant -\frac{a}{2}\leqslant 2$.

∵f(x)有两个实数根.

∴$\Delta=a^2-4b\geqslant0\Rightarrow b\leqslant\frac{a^2}{4}$. 则 $f(1)=1+a+b\leqslant a+\frac{a^2}{4}+1=(1+\frac{a}{2})^2$.

∵$1\leqslant-\frac{a}{2}\leqslant2\Rightarrow-2\leqslant\frac{a}{2}\leqslant-1\Rightarrow-1\leqslant1+\frac{a}{2}\leqslant0\Rightarrow0\leqslant(1+\frac{a}{2})^2\leqslant1$.

∴$0\leqslant f(1)\leqslant1$. 即与题干结论一致. 故条件（2）充分.

综上，故选 D.

【模拟训练】已知关于 x 的方程$x^2+(a-2)x+a=0$ 的两实根均落在（−1，1）内，则 a 的取值范围是【D】

A. $\frac{1}{2}<a\leqslant4+2\sqrt{3}$

B. $-\frac{1}{2}<a\leqslant4-2\sqrt{3}$

C. $-\frac{1}{2}<a\leqslant4+2\sqrt{3}$

D. $\frac{1}{2}<a\leqslant4-2\sqrt{3}$

E. 以上结论均不正确

【解析】

由于方程有两个实数根，所以$\Delta=(a-2)^2-4a\geqslant0$，可得 $a\leqslant4-2\sqrt{3}$或 $a\geqslant4+2\sqrt{3}$.

因为 $f(x)=x^2+(a-2)x+a$ 图像开口向上，还需要同时满足：

$f(-1)=3>0$，$f(1)=2a-1>0$，解得 $a>\frac{1}{2}$.

对称轴需要落在区间（−1，1），所以$-1<\frac{-(a-2)}{2}<1$，解得 $0<a<4$.

需同时满足上述三个条件，综上所述$\frac{1}{2}<a\leqslant4-2\sqrt{3}$. 故选 D.

【真题题型 6】韦达定理

（一）命题特点

题目给出一元二次方程及其两实根x_1，x_2，求x_1，x_2的代数式的值.

（二）解题思路

根据韦达定理的基本公式和常见变形式进行分析化简即可.

【真题重现】（2015）已知x_1，x_2是$x^2+ax-1=0$ 的两个实根，则$x_1^2+x_2^2=$【A】

A. a^2+2

B. a^2+1

C. a^2-1

D. a^2-2

E. $a+2$

【解析】根据题意，已知x_1，x_2是$x^2+ax-1=0$的两个实根.

由韦达定理得，$x_1+x_2=-a$，$x_1x_2=-1$.

则$x_1^2+x_2^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-a)^2-2\times(-1)=a^2+2$. 故选

A.

【模拟训练】已知x_1，x_2是方程$x^2+3x-7=0$的两个根，则$x_1^2-3x_2$的值为【E】

A. -2

B. -16

C. 3

D. 13

E. 16

【解析】

x_1是方程的根，即可代入原方程得$x_1^2+3x_1-7=0$，则$x_1^2=-3x_1+7$.

因此，$x_1^2-3x_2=-3x_1+7-3x_2=-3(x_1+x_2)+7$

又因为$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-3$，所以$-3\times(-3)+7=16$. 故选E.

第四节 代数方程

知识点讲解

（一）一次方程（组）

1. 概念

含有一个未知数，且未知数的最高次数是 1 的方程，称为一元一次方程.

其一般形式为 $ax=b(a\neq 0)$，方程的解为 $x=\dfrac{b}{a}$.

2. 方程组

二元一次方程组的形式是 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$，采用消元法或代入法求解.

有三种解的情况：

（1）如果 $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$，则方程组有唯一解 (x,y).

（2）如果 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$，则方程组有无穷多解.

（3）如果 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$，则方程组无解.

【注】可以将二元一次方程组的情况，看作两条直线的位置关系. 上述三种情况分别对应两条直线相交、重合、平行.

（二）绝对值方程

常用处理绝对值的方法：

1. 分段讨论法

根据绝对值的正负情况来分类讨论，其缺点是运算量较大，只有当绝对值比较简单时，才分段讨论求解.

2. 平方法

采用平方来去掉绝对值，利用公式 $|x|^2=x^2$ 来分析求解，平方法的缺点是次方升高，一般结合平方差公式来转移此缺点.

3. 图像法

图像法比较直观，通过常见绝对值图像来分析.

（三）分式方程

分母中含有未知数的有理方程称为分式方程.

解分式方程的步骤是：方程两边都乘以最简公分母，将分式方程转化为整式方程，求出根

以后，要验证原分式的分母是否有意义.

注意：分式方程本身隐含着分母不为 0 的条件，当把分式方程转化为整式方程后，方程中未知数允许取值的范围扩大了，如果转化后的整式方程的根恰好使原方程中分母的值为 0，就会出现不适合原方程的根——增根；因为解分式方程可能出现增根，所以解分式方程必须验根.

题型考法

【真题题型 1】解一次方程（组）

（一）命题特点

解方程（组）这类题目一般不单独考查，而是在解代数式、函数、应用题等问题的过程中，会涉及相关计算，因此熟练掌握其计算非常重要.

（二）解题思路

先根据题目条件列出方程（组），再根据代入消元法、加减消元法解出方程组的解.

【真题重现 1】（2014）某部门在一次联欢活动中共设了 26 个奖，奖品均价为 280 元，其中一等奖单价为 400 元，其他奖品均价为 270 元，一等奖的个数为【E】

A. 6

B. 5

C. 4

D. 3

E. 2

【解析】

根据题意，设一等奖的个数为 x.

则有 $400x+270\times(26-x)=280\times 26\Rightarrow 400x-270x=(280-270)\times 26\Rightarrow 130x=260\Rightarrow x=2$.

即一等奖的个数为 2.

故选 E.

【真题重现 2】（2022）购买 A 玩具和 B 玩具各一件需花费 1.4 元，购买 200 件 A 玩具和 150 件 B 玩具需花费 250 元，则 A 玩具的单价为【D】

A. 0.5 元

B. 0.6 元

C. 0.7 元

D. 0.8 元

E. 0.9 元

【解析】

采购金额＝采购 A 玩具的数量×A 玩具的单价＋采购 B 玩具的数量×B 玩具的单价.

根据题意,可设 A 玩具的单价为 x,B 玩具的单价为 y. 则$\begin{cases}x+y=1.4\\200x+150y=250\end{cases}$,解得$\begin{cases}x=0.8\\y=0.6\end{cases}$.

即 A 玩具的单价为 0.8 元. 故选 D.

【模拟训练】关于x，y的方程组$\begin{cases}2x+y=2k-3\\x+2y=k\end{cases}$的解中$x$与$y$的差不小于 5，则$k$的取值范围为【A】

A. $k\geqslant 8$

B. $k>8$

C. $k\leqslant 8$

D. $k<8$

E. $k=8$

【解析】

$\begin{cases}2x+y=2k-3①\\x+2y=k②\end{cases}$，①−②得：$x-y=k-3$

因为x与y的差不小于 5，所以$k-3\geqslant 5$，可得$k\geqslant 8$，故选 A.

【真题题型 2】解绝对值方程

（一）解题思路

1. 数形结合法

2. 分类讨论去绝对值法

【真题重现】（2022）设实数 x 满足$|x-2|-|x-3|=a$，则能确定 x 的值.【A】

（1）0<a≤$\frac{1}{2}$.

（2）$\frac{1}{2}$<a≤1.

【解析】

方法一（解方程）：

①当 x≤2 时，原方程化简为：2−x−（3−x）=a，a=−1，即当 x≤2 时，a 只能等于−1，此时 x 有无数个解.

②当 x≥3 时，原方程化简为：x−2−（x−3）=a，a=1，即当 x≥3 时，a 只能等于 1，此时 x 有无数个解.

③当 2<x<3 时，原方程化简为：x−2−（3−x）=a，x=$\frac{a+5}{2}$⇒2<$\frac{a+5}{2}$<3⇒−1<a

<1. 即当 2<x<3 时，−1<a<1，$x=\frac{a+5}{2}$ 有唯一的解.

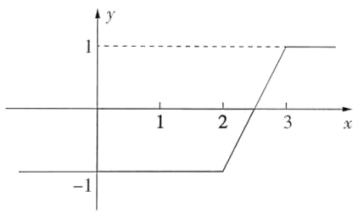
条件（1），根据条件 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$，在−1<a<1 的范围内，即 x 有唯一的解，能确定 x 的值. 故条件（1）充分.

条件（2），根据条件 $\frac{1}{2}<a\leqslant1$，有 a=1，是上述的第②种情况，故 x 有无数个解，即不能确定 x 的值. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

方法二（数形结合）：

设 $y=|x-2|-|x-3|$，函数图像如图所示.



当−1<a<1 时，方程有唯一的解. 当 a=±1 时，方程有无数个解.

条件（1），根据条件 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$，在−1<a<1 的范围内，即方程有唯一的解，能确定 x 的值. 故条件（1）充分.

条件（2），根据条件 $\frac{1}{2}<a\leqslant1$，有 a=1，符合当 a=±1 时，方程有无数个解. 即不能确定 x 的值. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

【模拟训练】2≤a≤4.【A】

（1）等式 $|a-2|+|4-a|=2$ 成立.

（2）$|a-3|\leqslant4$.

【解析】

条件（1），需要分以下三种情况讨论：

①若 a<2，方程化为 $2-a+4-a=2$，解得 a=2，无解；

②若 2≤a<4，方程化为 $a-2+4-a=2$，即 2=2，所以 2≤a<4；

③若 a>4，方程化为 $a-2+a-4=2$，解得 a=4，无解.

综上，2≤a<4，是题干集合的子集，故条件（1）充分.

条件（2），$-4\leq|a-3|\leq4$. −1≤a≤7，并非题干集合的子集，故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

【真题题型 3】解分式方程

（一）命题特点

对于分式方程，可单独考查其求解，也可在应用题解题过程中列出分式方程求解.

（二）解题思路

分式方程的求解步骤：

1. 去分母：方程两边都乘最简公分母.

2. 解整式方程.

3. 验根：将整式方程的根代入原分式方程分母中，若结果为 0，则该根为方程的增根，应舍去.

【真题重现】（2023）一个分数的分子与分母之和为 38，其分子分母都减去 15，约分后得到$\frac{1}{3}$，则这个分数的分母与分子之差为【D】

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

E. 5

【解析】根据题意，设分子为 x，分母为 y.

则有$\begin{cases} x+y=38 \\ \dfrac{x-15}{y-15}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$⇒解得：x=17，y=21.

即这个分数的分母与分子之差为 21−17=4. 故选 D.

【模拟训练】已知实数x，y，z，则可以确定xyz的值.【B】

（1）实数x，y，z均为正数.

（2）$x+\frac{1}{y}=4$，$y+\frac{1}{z}=1$，$z+\frac{1}{x}=\frac{7}{3}$.

【解析】

条件（1），不知x，y，z具体数值，无法确定xyz的值. 故条件（1）不充分.

条件（2），$y+\frac{1}{z}=1 \Rightarrow y=1-\frac{1}{z}$. $z+\frac{1}{x}=\frac{7}{3} \Rightarrow z=\frac{7}{3}-\frac{1}{x}$.

$x+\frac{1}{y}=x+\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=x+\frac{z}{z-1}=x+\frac{\frac{7}{3}-\frac{1}{x}}{\frac{7}{3}-\frac{1}{x}-1}=x+\frac{7x-3}{4x-3}=4 \Rightarrow x(4x-3)+(7x-3)$

$=4(4x-3)$解得$x=\dfrac{3}{2}\Rightarrow z=\dfrac{5}{3}$，$y=\dfrac{2}{5}\Rightarrow xyz=1$. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

第五节 不等式

知识点讲解

1. 不等式的定义

用不等号连接的两个（或两个以上）解析式称为不等式，使不等式成立的未知数的取值范围称为不等式的解（不等号包括＞、＜、≤、≥、≠五种）.

2. 不等式的基本性质

（1）传递性： $\begin{cases} a>b \\ b>c \end{cases} \Rightarrow a>c$.

（2）同向相加性： $\left.\begin{matrix} a>b \\ c>d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+c>b+d$.

（3）同向皆正相乘性： $\left.\begin{matrix} a>b>0 \\ c>d>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac>bd$.

（4）同号倒数性： $a>b>0 \Leftrightarrow \frac{1}{b}>\frac{1}{a}>0$，$a<b<0 \Leftrightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{a}<0$.

（5）皆正乘(开)方性： 如果$a>b>0$，那么$a^n>b^n>0$，那么$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（$n \in Z_+$）.

（6）变号法则：

①不等式两边同时加上（或减去）同一个数，不等号的方向不变.

②不等式两边同时乘（或除以）同一个正数，不等号方向不变；同时乘（或除以）同一个负数，不等号方向改变.

（7）增减性（a，b，$m>0$）

①当$\frac{a}{b}>1$时，则$\frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b}$.

②当$0<\frac{a}{b}<1$时，则$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$.

3. 均值不等式

当$x_1,x_2,\cdots,x_n$为n个正实数时，它们的算术平均不小于它们的几何平均，即$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$，当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$时，等号成立.

成立条件：一正二定三相等

一正：指的是所有数据均为正数.

二定：和定积最大；积定和最小.

三相等：当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$时，等号成立.

题型考法

【真题题型 1】不等式性质

（一）命题特点

对于不等式性质的考查，主要出现在不等式相关的证明中，常以条件充分性判断题的形式出现，也经常与恒成立问题，最值问题等结合考查.

（二）解题思路

结合上文的不等式的基本性质进行求解分析.也常通过举反例的方式说明条件不充分.

【真题重现】（2024）设a，b为正实数，则能确定$a \geq b$【B】

（1）$a+\frac{1}{a} \geq b+\frac{1}{b}$

（2）$a^2+a \geq b^2+b$

【解析】

条件（1），举反例，当$a=\frac{1}{2}$，$b=1$，满足$a+\frac{1}{a} \geq b+\frac{1}{b}$，但$a<b$.所以条件（1）不充分.

条件（2），由$a^2+a \geq b^2+b$，得$a^2-b^2+a-b \geq 0$，即$(a-b)(a+b)+a-b \geq 0$，继续化简得$(a-b)(a+b+1) \geq 0$.因为设a，b为正实数，所以$a+b+1 \geq 0$，所以可得到$a-b \geq 0$，即$a \geq b$.

故条件（2）充分.

故选B.

【模拟训练】$ab^2<cb^2$.【E】

（1）实数a，b，c满足$a+b+c=0$.

（2）实数a，b，c满足$a<b<c$.

【解析】依题意，$ab^2<cb^2 \Leftrightarrow b \neq 0$且$a<c$.

条件（1），$a+b+c=0$无法推出$b \neq 0$，也无法比较a，c的大小，所以无法推出$ab^2<cb^2$.

故条件（1）不充分.

条件（2），$a<b<c \Rightarrow a<c$，但b值无法确定，当$b=0$时，有$ab^2=cb^2$，所以也无法推出$ab^2<cb^2$.故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合起来，有$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a<b<c \end{cases} \Rightarrow a<c$，而$b$值仍无法确定，若取$a=-1$，$b=0$，$c=1$，显然也无法推出$ab^2<cb^2$. 故条件（1）（2）联合起来也不充分.

综上，故选 E.

【真题题型 2】解一次不等式（组）

（一）命题特点

题目给出不等式（组），求其解集；或给出不等式（组）及其解的情况，求参数取值范围.

解不等式（组）这类题目一般不单独考查，而是在解代数式、函数、应用题等问题的过程中，会涉及相关计算，因此熟练掌握其计算非常重要.

（二）解题思路

解不等式与解方程类似，但不等式在两边同乘（或除以）同一个数时，不但要考虑这个数是否为 0，还要考虑这个数的正负性 0. 对于不等式与实际运用相结合的题，要先根据题目条件列出相应的不等式（组），再进行求解.

1. 解一元一次不等式：解不等式 $ax+b>0$，要注意 a 是否为 0 及其正负.

2. 解一元一次不等式组：先解出每一个不等式的解集，根据交集的情况得到不等式组的解集.

【口诀】大大取较大，小小取较小，大小、小大中间找，大大、小小解不了.

3. 不等式（组）的参数求解：如果不等式（组）含有参数，在求参数范围时，要注意区间端点值能不能取到.

【真题重现】（2016）设 x，y 是实数，则 $x\leqslant 6$，$y\leqslant 4$.【C】

（1）$x\leqslant y+2$.

（2）$2y\leqslant x+2$.

【解析】

条件（1），$x\leqslant y+2$，是一个不等式，无法得出两个未知数的解. 故条件（1）不充分.

条件（2），$2y\leqslant x+2$，是一个不等式，无法得出两个未知数的解. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合$\begin{cases} x\leq y+2 & ① \\ 2y\leq x+2 & ② \end{cases}$.

①+②得，$x+2y\leqslant y+2+x+2 \Rightarrow x+2y\leqslant y+x+4 \Rightarrow y\leqslant 4$.

①×2+②得，$2x+2y\leqslant 2y+4+x+2 \Rightarrow 2x+2y\leqslant 2y+x+6 \Rightarrow x\leqslant 6$.

符合结论 $x\leqslant 6$，$y\leqslant 4$. 故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

【模拟训练】关于 x 的不等式组 $\begin{cases}x>2m\\x\geq m-3\end{cases}$ 的最小整数解为 1，则 m 的取值范围是【B】

A. $-3\leqslant m<1$

B. $0\leqslant m<\frac{1}{2}$

C. $3<m\leqslant 4$

D. $0\leqslant m<\frac{1}{2}$ 或 $3<m\leqslant 4$

E. $1<m\leqslant 2$

【解析】

①当 $2m\geqslant m-3$ 即 $m\geqslant -3$ 时，不等式组的解为 $x>2m$，由于最小整数解为 1，则 $0\leqslant 2m<1\Rightarrow 0\leqslant m<\frac{1}{2}$.

②当 $2m<m-3$ 即 $m<-3$ 时，不等式组的解为 $x\geqslant m-3$，由于最小整数解为 1，则 $0\leqslant m-3<1\Rightarrow 3\leqslant m<4$. $\because m<-3$，故不存在 m.

综上，m 的取值范围是 $0\leqslant m<\frac{1}{2}$，故选 B.

【真题题型 3】均值不等式求最值

（一）命题特点

求一个代数式或函数的最值.

（二）解题思路

1. 掌握均值不等式的常用公式及其变形式，通过将题目条件转化成常用公式的形式来求解最值.

（1）$a+b\geq 2\sqrt{ab}$（a，$b>0$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.）

（2）$a+\frac{1}{a}\geq 2(a>0)$（当且仅当 $a=1$ 时等号成立）；$a+\frac{1}{a}\leq -2(a<0)$（当且仅当 $a=-1$ 时等号成立）.

（3）几何平均不等式：如果 a，b，$c\in R_+$，那么 $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$，当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立.

（4）$a,b\in R\Rightarrow a^2+b^2\geq 2ab, ab\leq\frac{a^2+b^2}{2}$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

2. 均值不等式的构造：利用均值不等式求最值时，常常需要对已知条件进行构造。常用的构造定值条件的技巧有：添项法、拆项法、分离法、换元法.

（1）添项法：通过添加某项，使相加或相乘时能构成定值.

【例】$y=x+\frac{4}{x+2}+1=x+2+\frac{4}{x+2}-1\geq 2\sqrt{(x+2)\cdot\frac{4}{x+2}}-1=3$.

（2）拆项法：通过拆某项（注意要拆成相等的项），使相加或相乘时能构成定值. 求和时，拆次数绝对值较小的项；求积时，拆次数绝对值较大的项.

【例】$y=x+\frac{1}{x^2}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x^2}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2}}$.

$y=x^2(1-x)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot x\cdot(2-2x)\leq\frac{1}{2}(\frac{x+x+2-2x}{3})^3=\frac{4}{27}$.

（3）分离法：适用于分式的情况.

（4）换元法：对已知条件变形时，出现公共部分，可对其进行换元.

【真题重现 1】（2024）函数$\frac{x^4+5x^2+16}{x^2}$的最小值为____.【B】

A. 12
B. 13
C. 14
D. 15
E. 16

【解析】

$f(x)=\frac{x^4+5x^2+16}{x^2}=x^2+5+\frac{16}{x^2}\geq 5+2\sqrt{x^2\cdot\frac{16}{x^2}}=5+2\times\sqrt{16}=5+2\times 4=13$

当且仅当$x^2=\frac{16}{x^2}$时等号成立，即$x=\pm 2$时不等式取等号.

故选 B.

【真题重现 2】（2019）设函数$f(x)=2x+\frac{a}{x^2}(a>0)$在$(0,+\infty)$内的最小值为$f(x_0)=12$，则$x_0=$【B】

A. 5
B. 4
C. 3
D. 2
E. 1

【解析】

根据题意，原式整理得：$f(x)=2x+\frac{a}{x^2}=x+x+\frac{a}{x^2}(a>0,\ x>0)$，则利用均值不等式可得：

$f(x)=x+x+\frac{a}{x^2}\geq 3\sqrt[3]{x\cdot x\cdot\frac{a}{x^2}}$，即 $f(x)\geq 3\sqrt[3]{a}$.

又∵最小值 $f(x_0)$=12. ∴ $f(x_0)\geq 3\sqrt[3]{a}$ =12，即 a=64.

故当且仅当x_0=x_0=$\frac{a}{x_0^2}$时，即x_0=$\frac{64}{x_0^2}$时，解得x_0=4 时取最小值. 故选 B.

【模拟训练 1】若 x >－1，则 $f(x)=\frac{x^2+2x+2}{x+1}$ 的最小值是【A】

A. 2

B. 4

C. $\frac{4}{27}$

D. 5

E. 8

【解析】

由于 x >－1，所以有 x +1>0，$f(x)=\frac{(x+1)^2+1}{x+1}=x+1+\frac{1}{x+1}$，$x+1+\frac{1}{x+1}\geqslant$ $2\sqrt{(x+1)\left(\frac{1}{x+1}\right)}$ =2，当且仅当 $x+1=\frac{1}{x+1}$取等号，即 x =0 时，$f(x)$ 有最小值为 2. 故选 A.

【模拟训练 2】求函数 $y=3x+\frac{4}{x^2}$（x >0）的最小值【A】

A. $3\sqrt[3]{9}$

B. $2\sqrt[3]{9}$

C. $\sqrt[3]{9}$

D. $4\sqrt[3]{9}$

E. $5\sqrt[3]{9}$

【解析】

$y=\frac{3x}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{4}{x^2}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{3x}{2}\cdot\frac{3x}{2}\cdot\frac{4}{x^2}}=3\sqrt[3]{9}$.

故选 A.

【真题题型 4】均值不等式相关证明

（一）命题特点

这类题目常出现在条件充分性判断题中，其题干通常为证明某个式子成立/存在最值，需要说明条件的充分性.

（二）解题思路

1. 举反例

2. 重要不等式链：$\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\le\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}\le\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.（$a$，$b>0$，当且仅当$a=b$时，等号成立.）

【真题重现 1】（2020）设 a，b 是正实数，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$存在最小值.【A】

（1）已知 ab 的值.

（2）已知 a，b 是方程$x^2-(a+b)x+2=0$的不同实根.

【解析】

条件（1），因为 a，b 是正实数，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$，当 a=b 时，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最小值可以确定. 故条件（1）充分.

条件（2），因为 a，b 是方程的不同实根，所以$\begin{cases}\Delta=(a+b)^2-8>0\\ ab=2\end{cases}$，且 a，b 是正实数，则有$\begin{cases}a+b>2\sqrt{2}\\ ab=2\end{cases}$，因此$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{a+b}{2}>\sqrt{2}$. 无法取得最小值. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

【真题重现 2】（2020）设a，b，c，d是正实数，则$\sqrt{a}+\sqrt{d}\leqslant\sqrt{2(b+c)}$.【A】

（1）$a+d=b+c$.

（2）$ad=bc$.

【解析】

条件（1），a，b，c，d是正实数，由均值不等式可知：$a+d\geqslant 2\sqrt{ad}\Rightarrow\left(\sqrt{a}+\sqrt{d}\right)^2=a+d+2\sqrt{ad}\leqslant a+d+(a+d)=2(a+d)$

$\because a+d=b+c$

$\therefore\left(\sqrt{a}+\sqrt{d}\right)^2\leqslant 2(b+c)\Rightarrow\sqrt{a}+\sqrt{d}\leqslant\sqrt{2(b+c)}$. 故条件（1）充分.

条件（2），举反例，取 $a=1$，$d=100$，$b=c=10$，则 $\sqrt{1}+\sqrt{100}>\sqrt{2(10+10)}$. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

【模拟训练】设 a，b，c 是正实数，则 $(\frac{1}{a}-1)(\frac{1}{b}-1)(\frac{1}{c}-1)\geq 8$.【A】

（1）$a+b+c=1$.

（2）$a+b+c=2$.

【解析】

不等式两边同乘 abc，得 $(1-a)(1-b)(1-c)\geq 8abc$，故结论等价于 $(1-a)(1-b)(1-c)\geq 8abc$.

条件（1），$a+b+c=1$，此时有：$(1-a)(1-b)(1-c)=(b+c)(a+c)(a+b)\geq 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ac}\cdot 2\sqrt{ab}=8\sqrt{a^2b^2c^2}=8abc$. 故条件（1）充分.

条件（2），举反例，$a=1$，$b=\frac{1}{2}$，$c=\frac{1}{2}$，此时 $(\frac{1}{a}-1)(\frac{1}{b}-1)(\frac{1}{c}-1)=0$.故条件（2）不充分.

故选 A.

【真题题型 5】求解绝对值不等式

（一）命题特点

给出某一绝对值不等式，要求其解集；或已知某一绝对值不等式的解集，求参数的取值范围.

（二）解题思路

1. 分类讨论去绝对值法

通过对在 x 的不同取值范围下绝对值的正负情况进行分类讨论的方法去掉不等式中的绝对值.

2. 不等式两边平方去绝对值法.

【真题重现 1】（2017）不等式 $|x-1|+x\leqslant 2$ 的解集为【B】

A. $(-\infty,\ 1]$

B. $(-\infty,\ \frac{3}{2}]$

C. $[1,\ \frac{3}{2}]$

D. $[1,\ +\infty)$

E. $[\frac{3}{2},\ +\infty)$

【解析】

方法一：$|x-1|+x\leqslant 2 \Leftrightarrow |x-1|\leqslant 2-x$（$x\leqslant 2$）.

两边同时平方：$(x-1)^2\leqslant(2-x)^2 \Rightarrow x\leqslant\frac{3}{2}$.

$\because x\leqslant\frac{3}{2}$ 在 $x\leqslant 2$ 的范围内. $\therefore$ 同小取小. 即 $x\leqslant\frac{3}{2}$.

方法二：根据题意，$|x-1|$有绝对值，因此可以分类讨论.

①当 $x>1$ 时，$x-1+x\leqslant 2\Rightarrow x\leqslant\frac{3}{2}$. 则 $1<x\leqslant\frac{3}{2}$.

②当 $x\leqslant 1$ 时，$1-x+x\leqslant 2\Rightarrow 1\leqslant 2$，恒成立. 则 $x\leqslant 1$.

综上所述，不等式$|x-1|+x\leqslant 2$ 的解集为 $x\leqslant\frac{3}{2}$.

故选 B.

【真题重现 2】（2024）设 a 为实数，$f(x)=|x-a|-|x-1|$，则 $f(x)\leqslant 1$【C】

（1）$a\geq 0$

（2）$a\leq 2$

【解析】由题干，若 $f(x)\leq 1$，则有 $f(x)_{\max}\leq 1$

因为 $f(x)=|x-a|-|x-1|$，所以

当 $a\leq 1$ 时，$f(x)=\begin{cases}-x+a+x-1\\ x-a+x-1\\ x-a-x+1\end{cases}=\begin{cases}a-1,(x\leq a)\\ 2x-a-1,(a\leq x\leq 1)\\ 1-a,(x\geq 1)\end{cases}$.

此时 $f(x)_{\max}=1-a\leq 1$，解得 $0\leq a\leq 1$.

当 $a\geq 1$ 时，$f(x)=\begin{cases}-x+a+x-1\\ -x+a-x+1\\ x-a-x-1\end{cases}=\begin{cases}a-1,(x\leq 1)\\ -2x+a+1,(1\leq x\leq a)\\ -1-a,(x\geq a)\end{cases}$.

此时 $f(x)_{\max}=a-1\leq 1$，解得 $1\leq a\leq 2$.

综上，$f(x)\leqslant 1$ 时，a 的取值范围是 $0\leq a\leq 2$.

条件（1），$a\geq 0$，无法推出 $0\leq a\leq 2$，故条件（1）不充分.

条件（2），$a\leq 2$，无法推出 $0\leq a\leq 2$，故条件（2）不充分.

联合条件（1）、（2），得 $0\leq a\leq 2$，故条件（1）（2）联合充分.

故选 C.

【模拟训练 1】不等式$|2x-1|-|x-2|<0$ 的解集为【D】

A.（2，3）

B.（−3，1）

C.（4，7）

D.（−1，1）

E.（1，5）

【解析】

原不等式等价于$|2x-1|<|x-2|$，左右两边同时平方，可以得到$4x^2-4x+1<x^2-4x+4$，化简得，$x^2<1$，解得$-1<x<1$.

故选D.

【模拟训练2】若不等式$|x+3|-|x-6|>a$有解，则a的取值范围是【D】

A. $a>-9$

B. $a\leqslant-9$

C. $a\leqslant9$

D. $a<9$

E. $a>9$

【解析】

令$f(x)=|x+3|-|x-6|$，要使$|x+3|-|x-6|>a$成立，

由四个成立可知，$f(x)_{\max}>a$，求出$f(x)_{\max}$即可.

当$x\geqslant6$时，$f(x)=(x+3)-(x-6)=9$；

当$x\leqslant-3$时，$f(x)=-(x+3)+(x-6)=-9$；

当$-3<x<6$时，$f(x)=(x+3)+(x-6)=2x-3$，$-9<2x-3<9$，即$-9<f(x)<9$.

综上可知$-9\leqslant f(x)\leqslant9$，则$f(x)_{\max}=9$，所以$a<9$.

故选D.

【真题题型 5】一元二次不等式

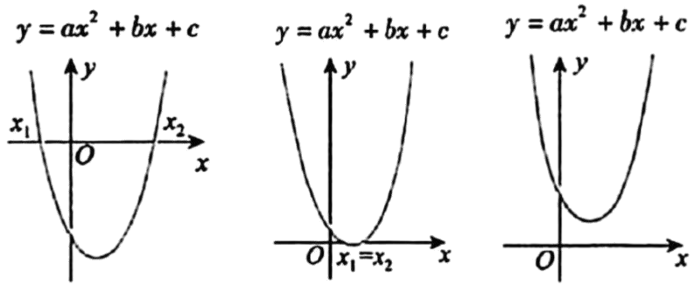
（一）解题思路

1. 化成标准型：$ax^2+bx+c>0$（<0），且$a>0$.

2. 计算判别式Δ.

3. 求根：十字相乘法、公式法.

4. 结合函数图像判断解集.



【口诀】大于号取两边，小于号取中间

【真题重现 1】（2006）已知不等式$ax^2+2x+2>0$的解集是$(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{2})$，则$a=$【A】

A. －12

B. 6

C. 0

D. 12

E. 以上均不对

【解析】

因为$ax^2+2x+2>0$的解集是$(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{2})$，所以有：$x_1=-\frac{1}{3}$，$x_2=\frac{1}{2}$.

根据韦达定理，有$x_1+x_2=-\frac{2}{a}$，$x_1x_2=\frac{2}{a}$.

解得$\frac{2}{a}=-\frac{1}{6}$，所以$a=-12$.

故选 A.

【真题重现 2】（2011）不等式$ax^2+(a-6)x+2>0$对所有实数x都成立.【E】

（1）$0<a<3$.

（2）$1<a<5$.

【解析】

由选项（1），（2）可知，$a>0$，故一元二次函数$ax^2+(a-6)x+2$开口向上.

故要使$x^2+(a-6)x+2>0$恒成立，则有$\Delta<0$，即函数图像在x轴上方.

所以有：$\Delta=(a-6)^2-4\times a\times 2=a^2-20a+36=(a-2)(a-18)<0$.

解得$2<a<18$.

条件（1）：$0<a<3$，不在$(2,\ 18)$内. 故条件（1）不充分.

条件（2）：$1<a<5$，不在$(2,\ 18)$内. 故条件（2）不充分.

联合条件（1），（2），有$1<a<3$，也不在$(2,\ 18)$内. 故条件（1），（2）联合不充分. 故选 E.

【真题重现 3】（2014）不等式$|x^2+2x+a|\leq 1$的解集为空集.【B】

（1）$a<0$

（2）$a>2$

【解析】

方法一：根据题意，$|x^2+2x+a|\leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant x^2+2x+a \leqslant 1 \Rightarrow -a \leqslant (x+1)^2 \leqslant 2-a$，要使解集为空集，则有 $2-a<0 \Rightarrow a>2$.

条件（1），$a<0$ 与结论 $a>2$ 的范围不一致.故条件（1）不充分.

条件（2），$a>2$ 与结论 $a>2$ 的范围一致.故条件（2）充分.

故选 B.

方法二：根据题意，$|x^2+2x+a|\leqslant 1$ 的解集为空集$\Rightarrow |x^2+2x+a|>1$ 恒成立.

$x^2+2x+a>1$ 或$x^2+2x+a<-1$（舍），即$\Delta<0 \Rightarrow a>2$.

条件（1），$a<0$ 与结论 $a>2$ 的范围不一致.故条件（1）不充分.

条件（2），$a>2$ 与结论 $a>2$ 的范围一致.故条件（2）充分.故选 B.

【模拟训练 1】已知不等式$x^2-mx+n<0$的解集是$-1<x<2$，则不等式$x^2+nx+m>0$的解集是【C】

A. $x\neq 3$

B. $x\neq 2$

C. $x\neq 1$

D. x是全体实数

E. $x\neq -1$

【解析】

因为不等式$x^2-mx+n<0$的解集是$-1<x<2$，所以-1 和 2 是方程$x^2-mx+n=0$的两个根.

根据韦达定理可求得$m=-1+2=1$，$n=-1\times 2=-2$.

要求的不等式为$x^2-2x+1>0$，即$(x-1)^2>0$，因此$x\neq 1$.

故选 C.

【模拟训练 2】已知不等式$mx^2+4mx+3\geqslant 0$的解集为全体实数，那么m的取值范围是【D】

A. $0<m<\frac{3}{4}$

B. $0<m\leqslant\frac{3}{4}$

C. $-\frac{3}{4}<m<0$

D. $0 \leqslant m \leqslant \frac{3}{4}$

E. $0 \leqslant m < \frac{3}{4}$

【解析】

若 $m=0$，原不等式等价于 $3 \geqslant 0$ 恒成立；

若 $m \neq 0$，要使得不等式恒成立，需要使得对应二次函数开口向上且$\Delta \leqslant 0$

即 $m>0$，$\Delta=16m^2-12m \leqslant 0$，解得 $0 \leqslant m \leqslant \frac{3}{4}$.

故选 D.

【模拟训练 3】不等式$ax^2-2ax+2a-3<0$ 的解集是空集.【B】

（1）$a<4$.

（2）$a \geqslant 4$.

【解析】

要使得题干成立，需要满足$a>0$ 且$\Delta=(-2a)^2-4a(2a-3) \leqslant 0$，因此$a \geqslant 3$.

条件（1），并非上述解集的子集，故条件（1）不充分.

条件（2），是上述解集的子集，故条件（2）充分.

综上，故选 B.

第三章 数列

第一节 数列

知识点讲解

（一）数列的概念与定义

1. 数列的定义: 按一定次序排列的一列数，简记为$\{a_n\}$.

2. 数列的分类

（1）有穷数列（项数有限）；无穷数列（项数无限）

（2）递增数列（$a_n > a_{n-1}$）；递减数列（$a_n < a_{n-1}$）

（3）摆动数列：例如－1, 1，－1, 1，－1……

（4）常数数列：例如 1, 1, 1……

3. 通项公式: $a_n = f(n)$（第n项a_n与项数n之间的函数关系）.

4. 数列前n项和 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.

5. 递推公式： a_n与a_{n+1}或a_{n-1}的关系式称为递推公式，若已知数列的递推关系式及首项，可以写出其他项，因此递推公式是确定数列的一种重要方式.

题型考法

【真题题型 1】S_n与a_n关系

（一）解题思路

1. 已知S_n，求a_n：用$S_n - S_{n-1}$法，即$a_n = \begin{cases} a_1 = S_1 & n = 1 \\ S_n - S_{n-1} & n \geq 2 \end{cases}$来求解分析.

2. 已知a_n，求S_n：$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.

【真题重现】(2015)已知 $M=(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})\cdot(a_2+a_3+\ldots+a_n)$，$N=(a_1+a_2+\ldots+a_n)\cdot(a_2+a_3+\ldots+a_{n-1})$，则 $M>N$.【B】

（1）$a_1>0$.

（2）$a_1a_n>0$.

【解析】根据题意，设$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$. 则有：

$M=(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})\cdot(a_2+a_3+\ldots+a_n)=S_{n-1}(S_n-a_1)$.

$N=(a_1+a_2+\ldots+a_n)\cdot(a_2+a_3+\ldots+a_{n-1})=S_n(S_{n-1}-a_1)$.

比较两数的关系，这里可以用作差法. 即 $M-N=S_{n-1}(S_n-a_1)-S_n(S_{n-1}-a_1)=a_1(S_n-S_{n-1})$.

条件（1），$a_1>0$，但不能确定(S_n-S_{n-1})的符号. 即不能确定 $M>N$. 故条件（1）不充分.

条件（2），$a_1a_n>0$.

$\because a_n=S_n-S_{n-1}$.

$\therefore M-N=a_1(S_n-S_{n-1})=a_1a_n>0 \Rightarrow M-N>0 \Rightarrow M>N$. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

【模拟训练】已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和S_n满足$S_n=\frac{n^2+n}{2}$，则数列$\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前 8 项的和为

【C】

A. $\frac{6}{7}$

B. $\frac{7}{8}$

C. $\frac{8}{9}$

D. $\frac{9}{10}$

E. $\frac{10}{11}$

【解析】因为$S_n=\frac{n^2+n}{2}$，当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1$

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n^2+n}{2}-\frac{(n-1)^2+n-1}{2}=n$

$S_8=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\dots+\frac{1}{8\times 9}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

故选 C.

第二节 等差数列

知识点讲解

1. 定义： 如果在数列$\{a_n\}$中，$a_{n+1}-a_n=d$（常数）（$n\in N$），则称数列$\{a_n\}$为等差数列，d为公差.

2. 通项公式： $a_n=a_1+(n-1)d=a_k+(n-k)d=nd+a_1-d$.

【注】若已知两个元素，则公差$d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$.

3. 前 n 项和： $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$

4. 等差数列增减性

（1）数列为递增数列：d＞0；

（2）数列为递增数列：d＜0；

（3）数列为常数列：d＝0，$a_n=a_1$.

5. 重要性质

（1）若$m+n=k+t$，则$a_m+a_n=a_k+a_t$；

（2）S_n为等差数列前n项和，则S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，…仍是等差数列，公差为n^2d；

（3）等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和分别用S_n、T_n表示，则$\dfrac{a_k}{b_k}=\dfrac{S_{2k-1}}{T_{2k-1}}$.

题型考法

【真题题型 1】等差数列的判断

（一）命题特点

给出一个数列的通项、前 n 项和或递推关系，判断其是否为等差数列.

（二）解题思路

1. 特征判断法：

（1）a_n的特征：若a_n形如一个一元一次函数$a_n=nd+(a_1-d)=An+B$（A，B为常数），则a_n为等差数列.

（2）S_n的特征：若S_n形如一个没有常数项的一元二次函数$S_n=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n=Cn^2+Dn$（$C$，$D$为常数），则$a_n$为等差数列.

2.递推法：

（1）定义法：$a_{n+1}-a_n=d$.

（2）中项公式法：$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$.

【注】常数列是等差数列.

【真题重现】（2019）设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，则数列$\{a_n\}$是等差数列.【A】

（1）$S_n=n^2+2n$，n＝1，2，3，….

（2）$S_n=n^2+2n+1$，n＝1，2，3，….

【解析】

条件（1），$S_n=n^2+2n$，则$S_1=a_1=3$，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+2n-[(n-1)^2+2(n-1)]=2n+1$.验证$a_1=3$与$S_1=a_1=3$相同且满足$An^2+Bn$的形式,则数列$\{a_n\}$是等差数列.故条件(1)充分.

条件(2),$S_n=n^2+2n+1$,则$S_1=a_1=4$,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+2n+1-[(n-1)^2+2(n-1)+1]=2n+1$.验证满足$An^2+Bn$的形式，但是$a_1=3$与$S_1=a_1=4$矛盾，则数列$\{a_n\}$不是等差数列.故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

【模拟训练】数列$\{a_n\}$的各项均为整数，前 n 项和为S_n，且$a_1=1$，则数列$\{S_n^2\}$是等差数列.【A】

（1）$S_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})$.

（2）$S_n=\frac{1}{2}n(n+1)$.

【解析】

条件（1），当 n⩾2 时，$S_n=\frac{1}{2}(S_n-S_{n-1}+\frac{1}{S_n-S_{n-1}})$.所以$2S_n=\frac{(S_n-S_{n-1})^2+1}{S_n-S_{n-1}}$，化简得$S_n^{\ 2}-S_{n-1}^{\ 2}=1$，所以$\{S_n^2\}$是等差数列.条件（1）充分.

条件（2），$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{2}n(n-1)=n$，此时$S_n^{\ 2}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$，并非等差数列.条件（2）并不充分.

综上，故选 A.

【真题题型 2】等差数列的基本性质与计算

（一）命题特点

考查等差数列的相关公式和计算，以及基本性质的应用.

（二）解题思路

灵活应用等差数列的相关公式，如通项公式、求和公式、中项公式，将相关公式代入题目条件后解方程即可.

【真题重现】（2024）已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_2a_3=a_1a_4+50$，且$a_2+a_3<a_1+a_5$，则公差为____.【C】

A. 2

B. −2

C. 5

D. −5

E. 10

【解析】由$a_2a_3=a_1a_4+50$，得$(a_1+d)(a_1+2d)=a_1(a_1+3d)+50$，

即$a_1^2+2a_1d+a_1d+2d^2=a_1^2+3a_1d+50$，化简得$2d^2=50$，$d^2=25$，解得$d=\pm5$.

因为$a_2+a_3<a_1+a_5$，所以$a_1+d+a_1+2d<a_1+a_1+4d$，化简得$d>0$. 所以 d=5.

故选 C.

【模拟训练】若数列$\{a_n\}$为等差数列，则$a_1a_8<a_4a_5$.【B】

（1）首项$a_1>0$.

（2）公差$d\neq0$.

【解析】由题意可知，$a_1a_8-a_4a_5=a_1(a_1+7d)-(a_1+3d)(a_1+4d)=-12d^2$，要使$a_1a_8<a_4a_5$，只需$d\neq0$即可.

条件（1），当$d=0$时，$a_1a_8=a_4a_5$. 故条件（1）不充分.

条件（2），$d\neq0$可得$a_1a_8-a_4a_5<0$，即$a_1a_8<a_4a_5$. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

【真题题型 3】等差数列前n项和的最值

（一）命题特点

已知一个等差数列，判断其前 n 项和 S_n 是否有最值，以及求 S_n 的最值或 S_n 取到最值时的项数 n.

（二）解题思路

1. 等差数列有最值的条件

（1）当$a_n<0$，$d>0$时，S_n 有最小值.

（2）当$a_n>0$，$d>0$时，S_n 有最大值.

2. 一元二次函数法求最值

等差数列前 n 项和可以整理成一元二次函数的形式 $S_n=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$，其对称轴为

$n=-\frac{a_1-\frac{d}{2}}{2\times\frac{d}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{a_1}{d}$，最值在最靠近对称轴的整数处.

【例】若解得 $n=6$，则 S_6 为最值；若解得 $n=6.9$，则 S_7 为最值；若解得 $n=6.5$，则 $S_6=S_7$ 为最值.

3. “$a_n=0$”法求最值

最值一定在“变号”时取得，可令 $a_n=0$ 则有

①若解得 n 为整数，则 $S_n=S_{n-1}$ 均为最值.

②若解得 n 为非整数，则当 n 取其整数部分 m 时，S_m 为最值.

【例】若解得 n = 6，则 $S_6=S_5$ 为最值；若解得 n = 6.9，则 S_6 为最值.

【真题重现】（2020）若等差数列$\{a_n\}$满足$a_1=8$，且$a_2+a_4=a_1$，则$\{a_n\}$前 n 项和的最大值为【E】

A. 16

B. 17

C. 18

D. 19

E. 20

【解析】

方法一：$a_2+a_4=2a_3=a_1=8\Rightarrow a_3=4\Rightarrow d=\dfrac{a_3-a_1}{3-1}=-2\Rightarrow a_5=a_3+2d=4-4=0$.

∵等差数列的性质可知，$d=-2<0$.

∴$\{a_n\}$为递减的等差数列，且$a_4=2$，$a_5=0$，$a_6=-2$.

所以数列$\{a_n\}$前 n 项和的最大值在第 4 项与第 5 项取得，即$S_{max}=\dfrac{(8+0)\times 5}{2}=20$.

方法二：根据题意，$a_2+a_4=a_1=8\Rightarrow d=-2$.

∵$S_n=\dfrac{d}{2}n^2+(a_1-\dfrac{d}{2})n=-n^2+9n$（n 为正整数）.

∴当 n 为 4 或 5 的时候取得最大值. 即$S_4=S_5=20$.

故选 E.

【模拟训练】若$\{a_n\}$是等差数列，$a_{10}=210$，$a_{31}=-280$，则前 n 项和S_n取得最大值.【D】

（1）$n=19$.

（2）$n=18$.

【解析】根据题干，$(31-10)d=a_{31}-a_{10}=-280-210=-490$，求得$d=-\dfrac{70}{3}$.

所以$a_1=a_{10}-9d=210-9\times(-\dfrac{70}{3})=420$.

因此，$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=420n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times(-\dfrac{70}{3})=\dfrac{-35n^2+1295n}{3}$.

当$n=\dfrac{37}{2}$时，上述函数取得最大值，但 n 为正整数，所以 n 取 18 或 19 时取最大值.

条件（1）符合题干要求，条件（1）充分.

条件（2）符合题干要求，条件（2）充分.

综上，故选 D.

【真题题型 4】等差数列的应用题

（一）命题特点

出现差值为定值或题目直接说明为等差数列时，采用等差数列分析求解.

（二）解题思路

根据题目找出相应数列的首项和公差，然后根据等差数列的通项公式、求和公式、中项公式等进行分析求解.

若题目中出现某几项“成等差数列”等字眼时，可设这些项分别为：a−d，a，a+d，且有$a^2=(a-d)\cdot(a+d)$

【真题重现 1】（2024）如图，在三角形点阵中，第 n 行及其上方所有点个数为a_n，如a_1

$=1$，$a_2=3$，已知a_k是平方数且$1<a_k<100$，则$a_k=$____.【C】

A. 16

B. 25

C. 36

D. 49

E. 81

【解析】观察图片的三角形点阵可发现，第一行有一个点，第二行有两个点，第三行有三个点...，以此类推，第n行有n个点，每行的点数构成一个首项为 1，公差为 1 的等差数列，设其为$\{b_n\}$，则其通项公式为$b_n=n$.

因为三角形点阵的第n行及其上方所有点个数为a_n，所以a_n的值就是b_n的前 n 项和S_n，即$a_n=1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. 因为$a_k$是平方数且$1<a_k<100$，从$n=1$分别逐个代入计算，只有$n=8$时才满足题目条件，此时$a_8=36$.

故选 C.

【真题重现 2】（2021）三位年轻人的年龄成等差数列，且最大与最小的两人年龄之差的 10 倍是另一人的年龄，则三人中年龄最大的是____岁.【C】

A. 19

B. 20

C. 21

D. 22

E. 23

【解析】

∵年龄成等差数列.

∴可以设三人的年龄按照从小到大依次为 a－d，a，a＋d.

又∵最大与最小的两人年龄之差的 10 倍是另一人的年龄.

∴$10[(a+d)-(a-d)]=a$.

化简得：20d＝a. 则三位年轻人的年龄分别为 19d，20d，21d.

∵年龄只能为正整数.

∴当 d＝1 时，三人的年龄分别为 19，20，21.

则三人中年龄最大的是 21 岁.

故选 C.

【真题重现 3】（2017）甲、乙、丙三种货车的载重量成等差数列，2 辆甲种车和 1 辆乙种车的满载量为 95 吨，1 辆甲种车和 3 辆丙种车的满载量为 150 吨，则用甲、乙、丙分别各 1 辆车一次最多运送货物【E】

A. 125 吨

B. 120 吨

C. 115 吨

D. 110 吨

E. 105 吨

【解析】根据等差数列的特征，设甲、乙、丙载重量分别为 x－a，x，x＋a.

则有 $\begin{cases}2(x-a)+x=95\\(x-a)+3(x+a)=150\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-2a=95\\4x+2a=150\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=35\\a=5\end{cases}$.

因此，甲、乙、丙各 1 辆车一次最多运送货物为(x－a)＋x＋(x＋a)＝3x＝3×35＝105（吨）. 故选 E.

【模拟训练 1】中国古代数学名著《算法统宗》中有这样一个问题：现有俸粮 305 石，分给正一品、从一品、正二品、从二品、正三品这 5 位官员，依照品级递减 13 石分这些俸粮，则正三品官员分得的俸粮是【D】

A. 74 石

B. 61 石

C. 48 石

D. 35 石

E. 30 石

【解析】设五等官分得的俸粮数记为数列$\{a_n\}$，由题意可知，$\{a_n\}$是以－13 为公差的等差数列，

∵$S_5=5a_1+10\times(-13)=305$，

∴$a_1=87$，

∴$a_5=a_1+4\times(-13)=35$.

故选 D.

【模拟训练 2】把 120 个面包全部分给 5 个人，使每人所得面包个数成等差数列，且较大的三份之和是较小的两份之和的 7 倍，则最小一份的面包个数为【A】

A. 2

B. 5

C. 6

D. 11

D. 14

【解析】

设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为 $d>0$，

由条件可知：$S_5=5a_1+10d=120$，$a_3+a_4+a_5=7(a_1+a_2)$

所以 $3(a_1+3d)=7(2a_1+d)$，解得$a_1=2$，$d=11$

所以最小一份的面包个数为 2 个.

故选 A.

第三节 等比数列

知识点讲解

（一）考点讲解

1. 定义: 如果在数列 $\{a_n\}$ 中，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$（常数），（$n\in N$），则称数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，q 为公比.

2. 通项: $a_n=a_1q^{n-1}=a_kq^{n-k}=\dfrac{a_1}{q}q^n$

【评注】若已知两个元素，则公比 $\dfrac{a_n}{a_m}=q^{n-m}$.

3. 前 n 项和： $S_n=\begin{cases} na_1 & q=1 \\ \dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}=\dfrac{a_1-a_{n+1}}{1-q} & q\neq 1 \end{cases}$

4. 等比数列增减性

（1）数列为递增数列：$\begin{cases} a_1>0 \\ q>1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1<0 \\ 0<q<1 \end{cases}$；

（2）数列为递增数列：$\begin{cases} a_1>0 \\ 0<q<1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1<0 \\ q>1 \end{cases}$；

（3）数列为常数列：$q=1, a_n\neq 0$.

5. 重要性质

（1）若 m，n，p，$q\in Z_+$，$m+n=p+q$，则 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$；

（2）若 S_n 为等比数列前 n 项和，则 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，…仍为等比数列，其公比为 q^n；

（3）若 $|q|<1$，则等比数列所有项和 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a_1}{1-q}$.

题型考法

【真题题型 1】等比数列的判断

（一）命题特点

给出一个数列的通项、前 n 项和或递推关系，判断其是否为等比数列.

（二）解题思路：

1. 特征判断法

（1）a_n 的特征：若 $a_n = Aq^n$（A，q 是不为 0 的常数），则 a_n 为等比数列.

（2）S_n 的特征：若 S_n 形如 $S_n = \frac{a_1}{q-1}q^n - \frac{a_1}{q-1} = kq^n - k$（$k$ 是不为 0 的常数，$q \neq 0$，$q \neq 1$），则 a_n 为等比数列.

2. 递推法

（1）定义法：$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$（$q \neq 0$）.

（2）中项公式法：$a_{n+1}{}^2 = a_n \cdot a_{n+2}$（$a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} \neq 0$）.

【注】非零常数列是等比数列.

【真题重现 1】（2023）设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，则a_2，a_3，a_4，…为等比数列.【C】

（1）$S_{n+1} > S_n$，$n = 1$，2，3，….

（2）$\{S_n\}$是等比数列.

【解析】

条件（1），$S_{n+1} > S_n$，$n = 1$，2，3，…⇒可知$a_{n+1} > 0$，S_n是递增，说明数列是递增数列.

举反例：数列$\{a_n\}$为 1，2，3，4，…，n，n＋1，但a_2，a_3，a_4，…为等差数列.与题干结论矛盾.故条件（1）不充分.

条件（2），$\{S_n\}$是等比数列⇒举反例：$S_n = 1$，$a_1 = 1$，$a_2 = a_3 = a_4 = \cdots = a_n = 0$，不满足$a_2$，$a_3$，$a_4$，…为等比数列，与题干结论矛盾.故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合有：设$\{S_n\}$的公比为 q，由于 $S_{n+1} > S_n$，所以 $q \neq 1$，则 $\begin{cases} S_n = S_1 q^{n-1} & ① \\ S_{n-1} = S_1 q^{n-2} & ② \end{cases}$

①－②得：$a_n = a_1 q^{n-2}(q-1)$（$n \geq 2$）.

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_1 q^{n-2}(q-1)}{a_1 q^{n-3}(q-1)} = q$（$n \geq 2$）.所以第二项以后成等比数列.

即a_2，a_3，a_4，…为等比数列.故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

【真题重现 2】（2019）已知数列$\{a_n\}$，则数列$\{a_n\}$为等比数列.【C】

（1）$a_na_{n+1}>0$.

（2）$a_{n+1}^2-2a_n^2-a_na_{n+1}=0$.

【解析】

条件（1），$a_na_{n+1}>0\Rightarrow a_n$与$a_{n+1}$同号，无法判断数列$\{a_n\}$为等比数列.故条件（1）不充分.

条件（2），$a_{n+1}^2-2a_n^2-a_na_{n+1}=0$，因式分解得：$(a_{n+1}-2a_n)(a_{n+1}+a_n)=0$.

因此$a_{n+1}=2a_n$或$a_{n+1}=-a_n$，故这种情况下会出现$a_n=0$（等比数列中不能含有0）.故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合得：因为a_n与a_{n+1}同号，所以排除条件（2）中$a_{n+1}=-a_n$的情况.

即$a_{n+1}=2a_n\Rightarrow$数列$\{a_n\}$为等比数列.故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选C.

【真题重现 3】（2023）已知等比数列$\{a_n\}$的公比大于1，则$\{a_n\}$单调递增.【C】

（1）a_1是方程$x^2-x-2=0$的根.

（2）a_1是方程$x^2+x-6=0$的根.

【解析】根据题意，设$a_n=a_1q^{n-1}(q>1)$.

$\because q>1$.

$\therefore q^{n-1}$为递增.要想使a_n为递增数列，满足$a_1>0$即可.

条件（1），a_1是方程$x^2-x-2=0$的根$\Rightarrow(x+1)(x-2)=0$，解得：$a_1=-1$或2.a_1存在小于0的情况（当$a_1=-1$时，$q>1$，则$\{a_n\}$单调递减），与上述结论矛盾.故条件（1）不充分.

条件（2），a_1是方程$x^2+x-6=0$的根$\Rightarrow(x+3)(x-2)=0$，解得：$a_1=-3$或2.a_1存在小于0的情况（当$a_1=-3$时，$q>1$，则$\{a_n\}$单调递减），与上述结论矛盾.故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合可确定$a_1=2>0$，满足$a_1>0$（当$a_1=2$时，$q>1$，则$\{a_n\}$单调递增）.与上述结论一致.故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选C.

【模拟训练 1】$\{a_n\}$是等比数列.【A】

（1）$f(x)=\lg x$，数列$\{f(a_n)\}$是等差数列.

（2）$f(x)=10^x$，数列$\{f(a_n)\}$是等比数列.

【解析】

条件（1），设公差为 d，则$d=f(a_{n+1})-f(a_n)=\lg a_{n+1}-\lg a_n=\lg\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，所以$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=10^d$，故数列$\{a_n\}$是等比数列. 条件（1）充分.

条件（2），设公比为 q，则$q=\dfrac{f(a_{n+1})}{f(a_n)}=\dfrac{10^{a_{n+1}}}{10^{a_n}}=10^{a_{n+1}-a_n}$，所以$a_{n+1}-a_n=\lg q$，故数列$\{a_n\}$是等差数列，但不一定是等比数列. 条件（2）不充分.

综上，故选 A.

【真题题型 2】等比数列的基本性质与运算

（一）命题特点

考查等比数列的相关公式和计算，以及基本性质的应用.

（二）解题思路

灵活应用性质和等比数列相关公式进行化简求值.

【真题重现】（2024）设$\{a_n\}$为等比数列，S_n为的前n项和，则能确定$\{a_n\}$的公比.【E】

（1）$S_3=2$

（2）$S_9=26$

【解析】

条件（1），$S_3=2$，即得到方程①：

$S_3=\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\dfrac{a_1(1-q)(1+q+q^2)}{1-q}=a_1(1+q+q^2)=2$，因为不知道$a_1$的值，所以不能确定公比$q$. 故条件（1）不充分.

条件（2），$S_9=26$，即得到方程②：$S_9=\dfrac{a_1(1-q^9)}{1-q}=26$，因为不知道$a_1$的值，所以不能确定公比$q$. 故条件（2）不充分.

联合条件（1）、（2），即联立方程①、②，由 $\frac{1-q^9}{1-q^3}=\frac{26}{2}=13$，令 $q^3=t$，得 $\frac{1-t^3}{1-t}=13$，即 $\frac{(1-t)(1+t+t^2)}{1-t}=13$，化简得 $t^2+t-12=0$，解得 $t=3$ 或 $t=-4$，即 $q^3=3$ 或 $q^3=-4$，q 的取值不唯一，所以不能确定 $\{a_n\}$ 的公比. 所以条件（1）、（2）联合也不充分.

故选 E.

【模拟训练】已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_4=-5$，$S_6=21S_2$，则 $S_8=$【A】

A. －85

B. 85

C. 120

D. －120

E. 110

【解析】设首项为 a_1，公比为 q.

若 $q=-1$，则 $S_4=0$，不符合题意，则 $q\neq-1$.

若 $q=1$，则 $S_6=6a_1$，$S_2=2a_1\Rightarrow S_6=3S_2$，不符合题意，则 $q\neq1$.

则 $S_4=\frac{a_1\left(1-q^4\right)}{1-q}=-5$，$S_6=21S_2$

$\Rightarrow\frac{a_1\left(1-q^6\right)}{1-q}=21\times\frac{a_1\left(1-q^2\right)}{1-q}\Rightarrow1-q^6=21\left(1-q^2\right)\Rightarrow\left(1-q^2\right)\left(1+q^4+q^2\right)=21\left(1-q^2\right)$

$\Rightarrow1+q^4+q^2=21\Rightarrow q^2=4$，则 $S_8=\frac{a_1\left(1-q^8\right)}{1-q}=\frac{a_1\left(1-q^4\right)}{1-q}\left(1+q^4\right)=S_4\left(1+q^4\right)=-5\times$（1＋16）＝－85.

故选 A.

【真题题型 3】等比数列应用题

（一）命题特点

出现比值为定值或题目直接说明为等比数列时，采用等比数列分析求解.

（二）解题思路

根据题目找出相应数列的首项和公比，然后根据等比数列的通项公式、求和公式、中项公式等进行分析求解.

若题目中出现某几项“成等比数列”等字眼时，可设这些项分别为：a，b，c，且有$b^2=a\cdot c$.

【真题重现】（2019）甲、乙、丙三人各自拥有不超过 10 本图书，甲再购入 2 本图书后，他们拥有的图书数量能构成等比数列，则能确定甲拥有图书的数量.【C】

（1）已知乙拥有的图书数量.

（2）已知丙拥有的图书数量.

【解析】根据题意，设甲拥有的图书数量为 x，乙拥有的图书数量为 y，丙拥有的图书数量为 z，则 x，y，z≤10. 可列方程：$(x+2)z=y^2$.

条件（1），举反例：y=4 时，x=2，z=4 或 x=6，z=2，无法确定甲拥有的图书数量. 故条件（1）不充分.

条件（2），举反例，z=1 时，x=7，y=3 或 x=2，y=2，无法确定甲拥有的图书数量. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合，y 确定，z 确定，则可以求出唯一的 x. 故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

【模拟训练】有一种细菌和一种病毒，每个细菌在每一秒末杀死一个病毒，同时将自身分裂为两个. 现在有一个这样的细菌和 100 个这样的病毒，则细菌将病毒全部杀死至少需要【C】

A. 5 秒

B. 6 秒

C. 7 秒

D. 8 秒

E. 9 秒

【解析】设将病毒全部杀死至少需要 n 秒.

根据题意,可知第一秒末杀死病毒 1 个,第二秒末杀死病毒 2 个,第三秒末杀死病毒 4 个,...,第 n 秒末杀死病毒2^{n-1}个.

故有$1+2+2^2+2^3+\dots+2^{n-1}\geq 100$，即$\frac{1-2^n}{1-2}\geq 100$,解得 $n\geq 7$.

故细菌将病毒全部杀死至少需要 7 秒. 故选 C.

第四章 几何

第一节 三角形

知识讲解

（一）三角形的边与角

1. 任意两边之和大于第三边，即$a+b>c$；任意两边之差小于第三边，即$a-b<c$.

2. 三角形内角之和 180°，外角等于不相邻的两个内角之和.

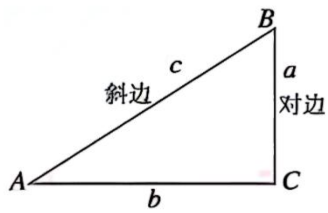
3. 三角形中大边对大角，大角对大边.

（二）三角形面积

$S=\frac{1}{2}\cdot$底$\cdot$高；$S=\frac{1}{2}ab\sin C$（C 为边 a,b 的夹角）.

（三）直角三角形

1. 勾股定理：$a^2+b^2=c^2$



2. 直角三角形中，30°角所对的边是斜边的一半，三边之比为 1∶$\sqrt{3}$∶2.

直角三角形中，一个内角为 45°，三边之比为 1∶1∶$\sqrt{2}$.

（四）三角形全等与相似

1. 全等、相似的判定

全等的判定		相似的判定
SSS（边边边）	三边对应相等的三角形全等	三边对应成比例
SAS（边角边）	两边及其夹角对应相等的三角形全等	两边对应成比例且夹角相等
ASA（角边角）	两角及其夹边对应相等的三角形全等	两对应角相等
AAS（角角边）	两角及其一角的对边对应相等的三角形全等	
HL（斜边、直角边）	斜边及一条直角边相等的直角三角形全等	一锐角相等

2. 相似性质

相似三角形对应边的比相等，为相似比，即$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=k$.

相似三角形的高、中线、角平分线的比也等于相似比.

相似三角形的周长比等于相似比，即$\frac{C_1}{C_2}=k$.

相似三角形的面积比等于相似比的平方，$\frac{S_1}{S_2}=k^2$.

题型考法

【真题题型 1】三角形边与角

（一）命题特点

常见的考查形式有两种：

一是根据边与边的关系判断能否构成三角形或已知一个图形是三角形求其三边之间的关系.

二是根据角的大小关系推边的大小关系或根据边的大小关系求角的大小关系.

（二）解题思路

根据三角形边与角的关系进行分析求解.

1.任意两边之和大于第三边，即$a+b>c$；任意两边之差小于第三边，即$a-b<c$，只要满足其中一个就可以构成三角形.

2.三角形中大边对大角，大角对大边.

【真题重现 1】（2020）在△ABC 中，∠B＝60°，则$\frac{c}{a}$＞2.【B】

（1）∠C＜90°.

（2）∠C＞90°.

【解析】

方法一：根据题意得，∠B＝60°，当∠ACB＝90°，$\frac{c}{a}=\frac{AB}{BC}=2$.

条件（1），当$\angle A_1CB<90°$时，$\frac{c}{a}=\frac{A_1B}{BC}<\frac{AB}{BC}=2$.故条件（1）不充分.

条件（2），当$\angle A_2CB>90°$时，$\frac{c}{a}=\frac{A_2B}{BC}>\frac{AB}{BC}=2$.故条件（2）充分.

综上，故选 B.

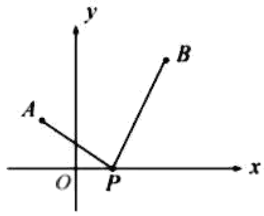
方法二：根据题意得，∠B＝60°，再根据“大边对大角”，所以当∠ACB＝90°时，$\frac{c}{a}=2$；当∠ACB＜90°时，$\frac{c}{a}<2$；当∠ACB＞90°时，$\frac{c}{a}>2$.

条件（1），∠C＜90°，则$\frac{c}{a}<2$.故条件（1）不充分.

条件（2），∠C>90°，则$\frac{c}{a}>2$.故条件（2）充分.

综上，故选B.

【真题重现2】（2023）如图所示，已知点$A(-1,2)$，点$B(3,4)$，若点$P(m,0)$使得$|PB|-|PA|$最大，则【A】



A. $m=-5$

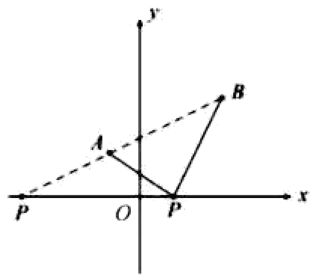
B. $m=-3$

C. $m=-1$

D. $m=1$

E. $m=3$

【解析】根据题意可画图，连接P、A、B，如图所示.



根据三角形三边的性质，任意两边之差小于第三边可得：$|PB|-|PA|<|AB|$.

当P、A、B三点共线时，$|PB|-|PA|$可得最大值$|AB|$.则有$\frac{4-2}{3-(-1)}=\frac{2-0}{(-1)-m}\Rightarrow$解得：$m=-5$.故选A.

【模拟训练】三条长度分别为a，b，c的线段能构成一个三角形.【E】

（1）$a+b>c$

（2）$b-c<a$

【解析】构成三角形需同时满足$a+b>c$，$a+c>b$，$b+c>a$.

条件（1），举反例，取$a=2$，$b=1$，$c=1$.不满足$b+c>a$.故条件（1）不充分.

条件（2），举反例，取$a=2$，$b=1$，$c=1$.不满足$b+c>a$.故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合可得：$\begin{cases}a+b>c\\b-c<a\end{cases}$，举反例，取$a=2$，$b=1$，$c=1$. 不满足$b+c>a$.

故条件（1）（2）联合起来不充分.

综上，故选 E.

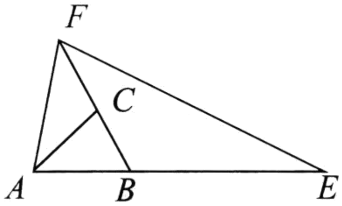
【真题题型 2】三角形面积——等面积模型：利用底高关系计算面积

（一）命题特点： 题目中两个三角形的底或高存在一定的数量关系.

（二）解题思路

1. 两个三角形底相等，面积比等于它们的高之比.
2. 两个三角形高相等，面积比等于它们的底之比.
3. 两个三角形高之比为$h_1:h_2$，底之比为$a_1:a_2$，则面积比为$S_1:S_2=a_1h_1:a_2h_2$.
4. 两个三角形同底等高时，面积相等.

【真题重现 1】（2014）如图，已知$AE=3AB$，$BF=2BC$，若$\triangle ABC$的面积是 2，则$\triangle AEF$的面积是【B】



A. 14

B. 12

C. 10

D. 8

E. 6

【解析】

根据题意，$S_{\triangle AEF}=S_{\triangle ABF}+S_{\triangle BEF}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACF}+S_{\triangle BEF}$.

$\because S_{\triangle ABC}$和$S_{\triangle ACF}$的顶点都为$A\Rightarrow S_{\triangle ABC}$和$S_{\triangle ACF}$的高相同，且$BF=2BC\Rightarrow C$为$BF$的中点，即$BC=CF$.

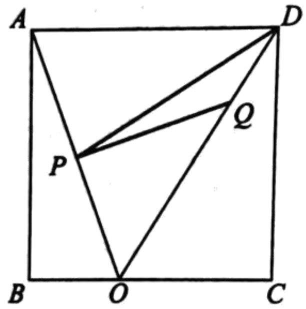
$\therefore$根据“顶点相同，等底同高”$\Rightarrow S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACF}=2\Rightarrow S_{\triangle ABF}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACF}=4$.

又$\because S_{\triangle ABF}$和$S_{\triangle BEF}$的顶点都为$F\Rightarrow S_{\triangle ABF}$和$S_{\triangle BEF}$的高相同，且$AE=3AB\Rightarrow AB:BE=1:2$.

$\therefore$根据“顶点相同，共高，面积比等于底边比”$\Rightarrow S_{\triangle ABF}:S_{\triangle BEF}=1:2\Rightarrow S_{\triangle BEF}=2S_{\triangle ABF}=8$.

即$S_{\triangle AEF}=S_{\triangle ABF}+S_{\triangle BEF}=4+8=12$. 故选 B.

【真题重现 2】（2019）如图所示，已知正方形 ABCD 的面积，点 O 为 BC 上一点，P 为 AO 的中点，Q 为 DO 上一点，则能确定△PQD 的面积.【B】



（1）O 为 BC 的三等分点.

（2）Q 为 DO 的三等分点.

【解析】根据题意得，设正方形的面积为 S＝AD・AB，则$S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AB=\frac{1}{2}S$.

又∵P 为 AO 中点.

∴△APD 和△PDO 等底同高，面积相等. 则$S_{\triangle PDO}=\frac{1}{2}S_{\triangle AOD}=\frac{1}{4}S$.

又∵△PQD 和△PDO 高相等.

∴△PQD 和△PDO 的面积之比等于 DQ 与 DO 的长度之比.（等高三角形面积比为底边比）

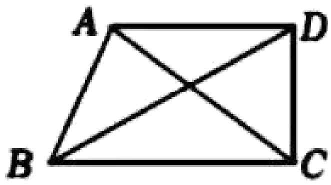
由上述分析得，△PDO 的面积为定值，△PQD 的面积仅取决于 DQ 与 DO 的长度之比.

条件（1），O 为 BC 的三等分点，△PQD 的面积与 O 点无关. 故条件（1）不充分.

条件（2），Q 为 DO 的三等分点⇒ $DQ=\frac{1}{3}DO$，则$S_{\triangle PQD}=\frac{1}{3}S_{\triangle PDO}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}S=\frac{1}{12}S$. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

【模拟训练】如图所示，在四边形 ABCD 中，AD∥BC. 则$S_{\triangle ACD}=10$.【A】



（1）$S_{\triangle ABD}=10$.

（2）AD＝10.

【解析】∵四边形 ABCD 中，AD∥BC.

∴△ABD 和△ACD 如果都以 AD 做底边时，此时底边上的高相等. 即$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}$.

∴设△ABD 和△ACD 的高为 h.

条件（1），$S_{\triangle ABD}=10\Rightarrow S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABD}=10$，与题干结论一致. 故条件（1）充分.

条件（2），$AD=10\Rightarrow S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot h$. 由于不知道 h 的值，则无法求出△ACD 的面积. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

【真题题型 3】三角形面积——正弦定理：利用夹角求面积

（一）命题特点

题目中出现多个三角形时，有共角或等角关系，或题目中明确给出了某个角的度数（通常为 30°，60°或 45°）以及其两夹边的长度.

（二）解题思路

已知三角形两边及夹角，则面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$.

【真题重现】（2017）已知△ABC 和△A'B'C'满足 AB：A'B'＝AC：A'C'＝2：3，∠A＋∠A'＝π，则△ABC 和△A'B'C'的面积之比为【E】

A. $\sqrt{2}:\sqrt{3}$

B. $\sqrt{3}:\sqrt{5}$

C. 2：3

D. 2：5

E. 4：9

【解析】

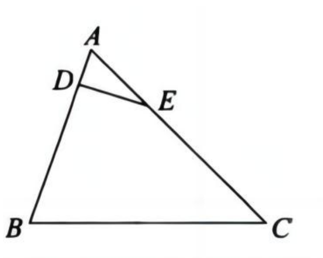
根据正弦定理得，$S=\frac{1}{2}bc\sin A$. 故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB||AC|\sin A$，$S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}|A'B'||A'C'|\sin A'$.

$\because \angle A+\angle A'=\pi \Rightarrow \sin A=\sin A'$. $AB:A'B'=AC:A'C'=2:3$.

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{\frac{1}{2}|AB||AC|\sin A}{\frac{1}{2}|A'B'||A'C'|\sin A'}=\frac{|AB||AC|}{|A'B'||A'C'|}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}.$$

故选 E.

【模拟训练】如图所示，三角形 ABC 中，AB 是 AD 的 5 倍，AC 是 AE 的 3 倍，如果三角形 ADE 的面积等于 1，那么三角形 ABC 的面积是【D】.



A. 10

B. 12

C. 14

D. 15

E. 16

【解析】$\dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{\frac{1}{2}AD\cdot AE\cdot\sin A}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A}=\dfrac{AD\cdot AE}{AB\cdot AC}=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{15}\Rightarrow S_{\triangle ABC}=15$.

故选 D.

【真题题型 5】勾股定理

（一）命题特点

常在以直角三角形为背景的题目中考查，一般不会单独考查，而是与其他题型相结合进行考查.

（二）解题思路

根据$a^2+b^2=c^2$进行分析求解.

【真题重现】（2022）某直角三角形的三边 a，b，c 成等比数列，则能确定公比的值.【D】

（1）a 是直角边长.

（2）c 是斜边长.

【解析】设公比为 q，则 $b=aq$，$c=aq^2$.

条件（1），a 是直角边.∵a，b，c 成等比数列⇒$b^2=ac$，∴b 为另一直角边，c 为斜边.

又∵直角三角形.

∴由勾股定理得：$c^2=a^2+b^2\Rightarrow(aq^2)^2=a^2+(aq)^2$.

化简得：$1+q^2=q^4\Rightarrow q^2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow q=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

q 有唯一正数解，即能确定公比的值.故条件（1）充分.

条件（2），c 是斜边.∵a，b，c 成等比数列⇒$b^2=ac$，∴a、b 均为直角边.

又∵直角三角形.

∴由勾股定理得：$c^2=a^2+b^2\Rightarrow(aq^2)^2=a^2+(aq)^2$.

化简得：$1+q^2=q^4\Rightarrow q^2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow q=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

q 有唯一正数解，即能确定公比的值.故条件（2）充分.

综上，故选 D.

【模拟训练】在直角三角形 ABC 中，三边分别为 a，b，c，且 a，b，$c\in Z^+$，则能确定三角形的面积.【D】

（1）b 为直角边且 $b=3$.

（2）c 为斜边且 $c=5$.

【解析】

条件（1），设 a 为另一条直角边，则由勾股定理可得$a^2+3^2=c^2$，移项得$c^2-a^2=9$，再由平方差公式可得$(c+a)(c-a)=9$，因为 a，b，$c\in Z^+$，所以$c+a=9, c-a=1$，解得$c=5, a=4$，故$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times3\times4=6$.故条件（1）充分.

条件（2），有勾股定理可得$a^2+b^2=5^2$，因为 a，b，$c\in Z^+$，所以$a=3$，$b=4$ 或 $a=4$，$b=3$. 故$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times3\times4=6$.故条件（2）充分.

故选 D.

【真题题型 6】三角形全等

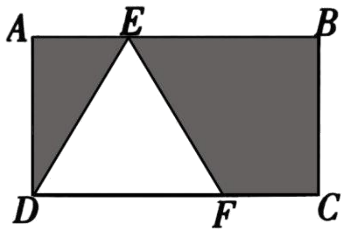
（一）解题思路

遇到图形的平移、折叠、对称或翻转时，可采用全等分析.

1. 平移的性质： 平移前后的两个图形全等，对应边平行（或共线）且相等；对应点距离是平移距离.

2. 折叠的性质： 折叠前后的两个图形全等，折痕为对称轴，对称轴是对应点所连线段的垂直平分线.

【真题重现】（2018）如图，在矩形 ABCD 中，AE＝FC，则三角形 AED 与四边形 BCFE 能拼接成一个直角三角形.【D】



（1）EB＝2FC.

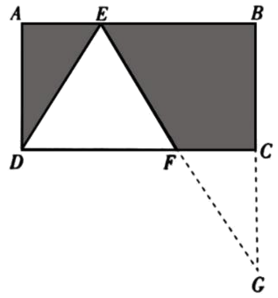
（2）ED＝EF.

【解析】根据延长 BC、EF 交于点 G 可画图，如图所示.

∵矩形 ABCD.

∴AB∥DC，∠A＝∠EBG＝∠BCF＝∠GCF＝90°，CB＝DA.

若三角形 AED 与四边形 BCFE 能拼接成一个直角三角形，则△AED≌△CFG.



条件（1），∵EB＝2FC.

∴FC 是△GBE 中位线.则有 GC＝CB＝DA.

在△AED 和△CFG 中$\begin{cases} AE = FC \\ \angle A = \angle GCF \\ GC = DA \end{cases}$ ⇒△AED≌△CFG（SAS）.

即三角形 AED 与四边形 BCFE 能拼接成一个直角三角形.故条件（1）充分.

条件（2），∵ED＝EF.

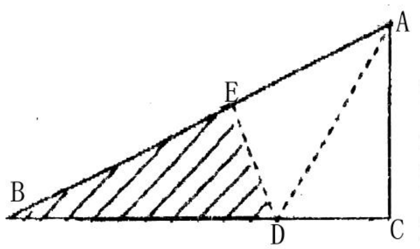
∴∠EDF＝∠EFD⇒∠EDF＝∠AED（内错角相等），∠EFD＝∠CFG（对顶角）⇒∠AED＝∠CFG.

在△AED 和△CFG 中$\begin{cases} \angle AED = \angle CFG \\ AE = FC \\ \angle A = \angle GCF \end{cases}$ ⇒△AED≌△CFG（ASA）.

即三角形 AED 与四边形 BCFE 能拼接成一个直角三角形.故条件（2）充分.

综上，故选 D.

【模拟训练】直角三角形 ABC 的斜边 $AB=13$ 厘米，直角边 $AC=5$ 厘米，把 AC 对折到 AB 上去与斜边相重合，点 C 与点 E 重合，折痕为 AD（如下图），则图中阴影部分的面积为【B】



A. 20

B. $\frac{40}{3}$

C. $\frac{38}{3}$

D. 14

E. 12

【解析】

折叠后$\triangle ACD \cong \triangle AED$，则根据勾股定理，$BE^2+DE^2=BD^2$，并且$BD+CD=BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=12$.

又$AE=AC=5$，所以$BE=AB-AE=8$，即$8^2+CD^2=(12-CD)^2$，所以$CD=\frac{10}{3}$.

从而$S_{阴影}=S_{\Delta ABC}-2S_{\Delta ACD}=\frac{40}{3}$. 故选 B.

【真题题型 9】三角形相似

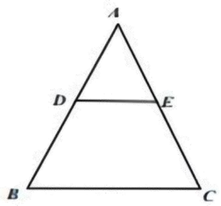
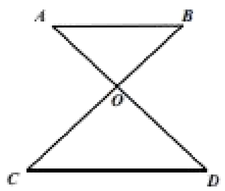
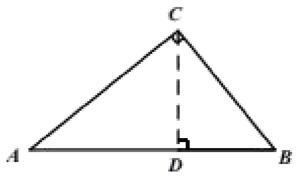
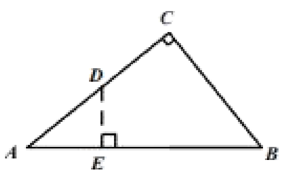
（一）命题特点

题目常以相似模型为背景，要求相似模型中某条边的长度、某个三角形的面积等，需熟练掌握相似的判定条件与相似的性质.

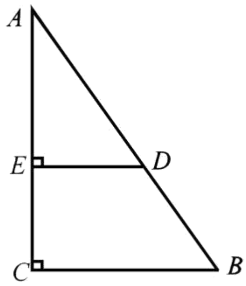
（二）解题思路

判定三角形相似后利用相似的性质解题.

【常见相似模型】：

图	模型
	A 字型：$\Delta ADE\sim\Delta ABC$
	8 字型：$\Delta ABO\sim\Delta DCO$
	$\Delta ACD\sim\Delta CBD\sim\Delta ABC$
	$\Delta ADE\sim\Delta ABC$

【真题重现 1】（2013）如图，在直角三角形 ABC 中，AC＝4，BC＝3，DE∥BC. 已知梯形 BCED 的面积为 3，则 DE 的长为【D】



A. $\sqrt{3}$

B. $\sqrt{3}+1$

C. $4\sqrt{3}-4$

D. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

E. $\sqrt{2}+1$

【解析】

根据题意，在直角三角形 ABC 中，DE∥BC.

∵在△ABC 和△ADE 中$\begin{cases}\angle ACB=\angle AED\\ \angle A=\angle A\\ \angle ABC=\angle ADE\end{cases}$.

∴△ABC∽△ADE（AAA）.

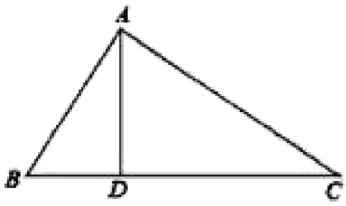
又∵$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot BC=\dfrac{1}{2}\times4\times3=6$. $S_{梯形\ BCED}=3$.

∴$S_{\triangle ADE}=S_{\triangle ABC}-S_{梯形\ BCED}=6-3=3$.

由相似三角形面积比等于边长比的平方，得$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle ADE}=(BC:DE)^2\Rightarrow6:3=(3:DE)^2\Rightarrow$ $DE=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

故选 D.

【模拟训练 1】如图所示，在直角三角形 ABC 中，∠BAC＝90°，AD⊥BC，垂足为点 D. 则 AD＝3.【A】



（1）BD＝2，CD＝$\frac{9}{2}$.

（2）CD＝8，$\frac{S_{\Delta ADB}}{S_{\Delta ADC}}=\frac{4}{9}$.

【解析】根据题意得：∠BAC＝∠BDA＝∠CDA＝90°.

∵∠BAD＋∠CAD＝∠BAC，∠B＋∠BAD＝∠BDA，∠C＋∠CAD＝∠CDA.

∴∠B＝∠CAD，∠C＝∠BAD.

∵在△BDA 和△ADC 中，$\begin{cases}\angle B=\angle CAD\\ \angle BDA=\angle ADC\\ \angle BAD=\angle C\end{cases}$.

∴△BDA∽△ADC（AAA）.

条件（1），BD＝2，CD＝$\frac{9}{2}$.

∵△BDA∽△ADC.

∴$\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{CD}\Rightarrow AD^2=BD\cdot CD=2\times\frac{9}{2}=9$，解得：AD＝3. 故条件（1）充分.

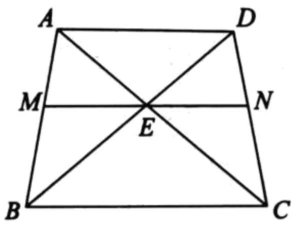
条件（2），CD＝8，$\frac{S_{\Delta ADB}}{S_{\Delta ADC}}=\frac{4}{9}$.

∵△BDA∽△ADC.

∴$\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{CD}$，$(\frac{AD}{CD})^2=\frac{S_{\Delta ADB}}{S_{\Delta ADC}}\Rightarrow(\frac{AD}{8})^2=\frac{4}{9}$，解得：AD＝$\frac{16}{3}\neq 3$. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

【真题重现 2】（2015）如图，梯形 ABCD 的上底与下底分别为 5，7，E 为 AC 与 BD 的交点，MN 过点 E 且平行于 AD，则 MN＝【C】



A. $\frac{26}{5}$

B. $\dfrac{11}{2}$

C. $\dfrac{35}{6}$

D. $\dfrac{36}{7}$

E. $\dfrac{40}{7}$

【解析】

∵梯形 ABCD ⇒ AD∥BC，AD＝5，BC＝7. ∴△ADE∽△CBE（AAA）.

则有 $\dfrac{DE}{BE}=\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{AD}{CB}=\dfrac{5}{7}$.

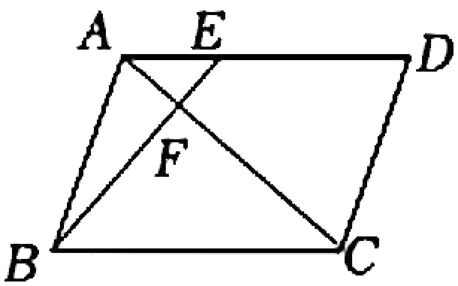
∵MN 过点 E 且平行于 AD. ∴△AME∽△ABC（AAA）.

则有 $\dfrac{ME}{BC}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{5}{12}\Rightarrow \mathrm{ME}=\dfrac{5}{12}\cdot \mathrm{BC}=\dfrac{35}{12}$.

同理可得，∴△CNE∽△CDA（AAA）. 则有 $\dfrac{EN}{AD}=\dfrac{CE}{CA}=\dfrac{7}{12}\Rightarrow \mathrm{NE}=\dfrac{7}{12}\cdot \mathrm{AD}=\dfrac{35}{12}$.

综上，$\mathrm{MN}=\mathrm{ME}+\mathrm{NE}=\dfrac{35}{12}+\dfrac{35}{12}=\dfrac{35}{6}$. 故选 C.

【模拟训练 2】如图所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 是 AD 边上的点，线段 BE 与 AC 交于点 F. 则 $AC=28$. 【A】



（1） $AE:AD=2:5$， $AF=8$.

（2） $AE:AD=1:5$， $AF=6$.

【解析】根据题意，∵在平行四边形 $ABCD$ 中. ∴ $AD=BC$.

又∵ $AD\parallel BC$. ∴△ AEF ∽△ CBF

⇒ $AF:FC=AE:BC$.

条件（1），∵ $AE:AD=2:5$.

∴ $AF:FC=2:5$.

∵ $AF=8$

∴ $FC=20$. 则 $AC=AF+FC=28$. 故条件（1）充分.

条件（2），∵ $AE:AD=1:5$.

∴ $AF:FC=1:5$.

∵ $AF=6$.

$\therefore FC = 30$. 则 $AC = AF + FC = 36$. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

第二节 四边形

知识点讲解

1.任意四边形

（1）四边形内角之和为 360°，外角之和为 360°.

（2）任意四边形各边中点依次连接所得四边形为平行四边形，其面积为原四边形的一半.

2.平行四边形

（1）两组对边平行且相等；两组对角分别相等；两条对角线互相平分.

（2）$S_{平行四边形}=底边\times 高$

3.矩形

（1）四个角都是直角；对角线互相平分且相等.

（2）面积：$S=ab$，对角线：$l=\sqrt{a^2+b^2}$（a 为长，b 为宽）.

4.菱形

（1）四个角是直角；对角线互相平分且相等.

（2）面积：$S=ah=\frac{1}{2}l_1l_2$（l_1、l_2 为两条对角线）.

5.正方形

面积：$S=a^2$；对角线：$l=\sqrt{2}a$（a 为边长）.

6.梯形

面积：$S=\frac{1}{2}(a+b)h$；中位线：$l=\frac{1}{2}(a+b)$（a 为上底，b 为下底，h 为高，l 为中位线).

题型考法

【真题题型 1】平行四边形

（一）命题特点

考查平行四边形的相关计算（面积、长度、角度等）以及基本性质的应用. 需要熟练掌握平行四边形的相关公式、性质和定理.

（二）解题思路

平行四边形两组对边平行且相等，平行四边形的核心点是对角线. 此外，如果没有其他要求，可以将平行四边形特殊成矩形或正方形来求解答案.

【真题重现】（2024）已知点 $O(0,0)$，$A(a,1)$，$B(2,b)$，$C(1,2)$，若四边形 $OABC$ 为平行四边形，则 $a+b=$____. 【B】

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

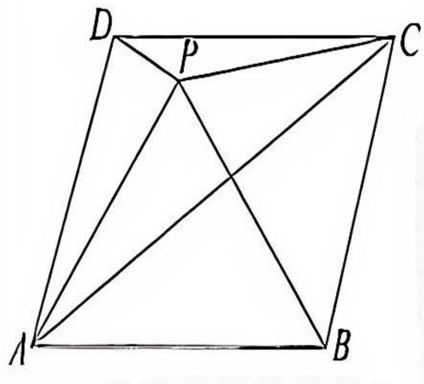
E. 7

【解析】

因为四边形$OABC$为平行四边形. 根据平行四边形的性质，平行四边形的对角线互相平分，所以OB的中点$=AC$的中点，因为OB的中点坐标为（$\frac{0+2}{2}, \frac{0+b}{2}$），$AC$的中点坐标为（$\frac{a+1}{2}, \frac{1+2}{2}$）. 所以有$\frac{0+2}{2}=\frac{a+1}{2}$，$\frac{0+b}{2}=\frac{1+2}{2}$，解得$a=1$，$b=3$. 所以$a+b=4$.

故选 B.

【模拟训练】如图，已知 P 是平行四边形 ABCD 内一点，且$S_{\triangle PAB}=5$, $S_{\triangle PAD}=2$, 则$S_{\triangle PAC}=$【B】



A. 2

B. 3

C. 3. 5

D. 4

E. 5

【解析】

由平行四边形的性质可知：$S_{\triangle PCD}+S_{\triangle PAB}=S_{\triangle ACD}$，则$S_{\triangle PAC}=S_{\triangle ACD}-S_{\triangle PAD}-S_{\triangle PCD}=S_{\triangle PCD}+S_{\triangle PAB}-S_{\triangle PAD}-S_{\triangle PCD}=S_{\triangle PAB}-S_{\triangle PAD}=5-2=3$.

故选 B.

【真题题型 2】矩形

（一）命题特点

考查矩形的相关计算（面积、长度、角度等）以及基本性质的应用. 需要熟练掌握矩形的

相关公式、性质和定理.

【真题重现】（2017）某种机器人可搜索到的区域是半径为 1 米的圆. 若该机器人沿直线行走 10 米，则其搜索过的区域的面积为____.（单位：平方米）【D】

A. $10+\frac{\pi}{2}$

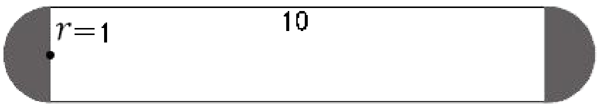
B. $10+\pi$

C. $20+\frac{\pi}{2}$

D. $20+\pi$

E. 10π

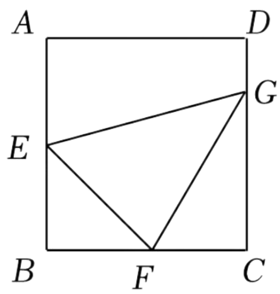
【解析】根据题意机器人的运动轨迹可画图，如图所示.



由图可得，机器人搜索过的区域的面积为两个半圆（一个圆）加一个以圆的直径为宽，行走长度为长的矩形. 即 $S=S_{圆}+S_{矩形}=\pi r^2+长\times宽=\pi\times1^2+2\times10=20+\pi$.

故选 D.

【模拟训练】如图所示，矩形 ABCD 中，点 E，F，G 分别为 AB，BC，CD 边上的点，点 E 是 AB 的中点，AB＝4，CG＝3，△EFG 中∠EFG＝75°，∠FEG＝60°，矩形 ABCD 的面积为【A】



A. $8+4\sqrt{3}$

B. $12\sqrt{3}$

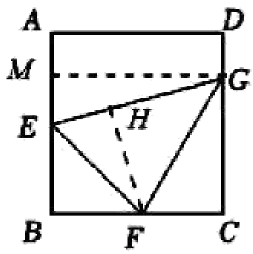
C. $6+4\sqrt{3}$

D. $4\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

E. $6\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

【解析】

根据题意，过点 F 作 FH⊥EG 于点 H，过点 G 作 GM⊥AB 于点 M，如图所示.



∵∠EFG=75°，∠FEG=60°

.∴∠EGF=45°.

∵FH⊥EG. ∴△FHG 为等腰直角三角形.

∴FH=HG.

∵FH⊥EG，∠FEG=60°.

∴HF=$\sqrt{3}$EH.

设 EH=x，则 HF=HG=$\sqrt{3}$x，EF=2x，FG=$\sqrt{6}$x，EG=($\sqrt{3}$+1)x.

∴BF=$\sqrt{EF^2-BE^2}=\sqrt{4x^2-4}$. FC=$\sqrt{FG^2-CG^2}=\sqrt{6x^2-9}$.

∵四边形 ABCD 是矩形.

∴CD=AB=4.

∴DG=CD−CG=1.

∵GM⊥AB.

∴AM=DG=1.

∵点 E 是 AB 的中点.

∴AE=BE=2.

∴ME=AE−AM=1.

∴MG=$\sqrt{EG^2-ME^2}=\sqrt{[(\sqrt{3}+1)x]^2-1^2}=\sqrt{(4+2\sqrt{3})x^2-1}$.

∵GM⊥AB.

∴MG=BC.

∴BF+FC=MG.

∴$\sqrt{4x^2-4}+\sqrt{6x^2-9}=\sqrt{(4+2\sqrt{3})x^2-1}$

两边平方得：

$$4x^2-4+6x^2-9+2\sqrt{\left(4x^2-4\right)\left(6x^2-9\right)}=\left(4+2\sqrt{3}\right)x^2-1$$

$$2\sqrt{\left(4x^2-4\right)\left(6x^2-9\right)}=\left(2\sqrt{3}-6\right)x^2+12 \Rightarrow \sqrt{\left(4x^2-4\right)\left(6x^2-9\right)}=\left(\sqrt{3}-3\right)x^2+6$$

两边平方的：$\left(4x^2-4\right)\left(6x^2-9\right)=\left(12-6\sqrt{3}\right)x^4+36+12\left(\sqrt{3}-3\right)x^2$

$\left(2x^2-2\right)\left(2x^2-3\right)=\left(2-\sqrt{3}\right)x^4+6+2\left(\sqrt{3}-3\right)x^2 \Rightarrow 4x^4-10x^2+6=\left(2-\sqrt{3}\right)x^4+6+\left(2\sqrt{3}-6\right)x^2$

$\left(2+\sqrt{3}\right)x^4-2\left(\sqrt{3}+2\right)x^2=0 \Rightarrow x^4-2x^2=0 \Rightarrow x^2\left(x^2-2\right)=0$

解得：$x=\sqrt{2}$（0、负数不符合题意，舍去）.

$\therefore MG=\sqrt{(4+2\sqrt{3})\times 2-1}=\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}$.

∴矩形 ABCD 的面积为 $AB\cdot MG=4\times(2+\sqrt{3})=8+4\sqrt{3}$.

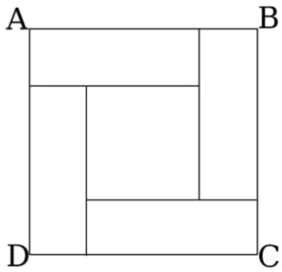
故选 A.

【真题题型 3】正方形

（一）命题特点

考查正方形的相关计算（面积、长度、角度等）以及基本性质的应用. 需要熟练掌握正方形的相关公式、性质和定理.

【真题重现】（2016）如图，正方形 ABCD 由四个相同的长方形和一个小正方形拼成，则能确定小正方形的面积.【C】



（1）已知正方形 ABCD 的面积.

（2）已知长方形的长与宽之比.

【解析】根据题意，设长方形的长、宽分别为 a，b，则$S_{大正方形}=(a+b)^2$，$S_{小正方形}=(a-b)^2$.

条件（1），已知正方形 ABCD 的面积⇒ a+b 的值可以确定，但无法确定 a，b 的值，即不能确定小正方形的面积. 故条件（1）不充分.

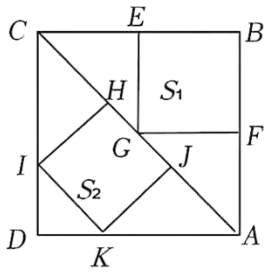
条件（2），已知长方形的长与宽之比⇒$\frac{a}{b}$的值可以确定，但无法确定 a，b 的值，即不能确定小正方形的面积. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合，a+b 的值和$\frac{a}{b}$的值都可以确定，则能确定 a，b 的值，即能确定小正方形的面积. 故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

【模拟训练】如图所示，正方形 ABCD 边长为 12，里面有 2 个小正方形，各边的顶点都在大正方形的边上的对角线或边上，它们的面积分别是 S_1，S_2，则 $S_1+S_2=$【C】



A. 64

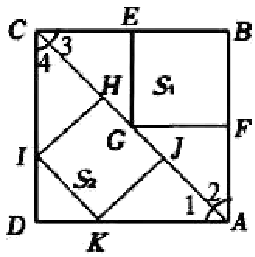
B. 66

C. 68

D. 70

E. 72

【解析】如图所示，由正方形的性质，$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4=45^\circ$.



所以，四个角所在的三角形都是等腰直角三角形.

∵正方形的边长为 12. ∴$AC=12\sqrt{2}$.

∴两个小正方形的边长分别为 $\frac{1}{3}\times 12\sqrt{2}=4\sqrt{2}$，$\frac{1}{2}\times 12=6$.

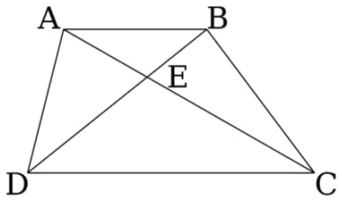
∴ $S_1+S_2=(4\sqrt{2})^2+6^2=32+36=68$. 故选 C.

【真题题型 4】梯形

（一）命题特点

考查梯形的相关计算（面积、长度、角度等）以及基本性质的应用，常和相似模型结合考查. 需要熟练掌握梯形的相关公式、性质和定理.

【真题重现】（2016）如图，在四边形 ABCD 中，AB∥CD，AB 与 CD 的长分别为 4 和 8. 若△ABE 的面积为 4，则四边形 ABCD 的面积为【D】



A. 24

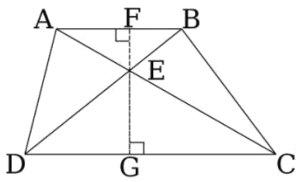
B. 30

C. 32

D. 36

E. 40

【解析】根据题意可画图，如图所示.（过点 E 作△ABE 和△CDE 的高 EF、EG）



∵在四边形 ABCD 中，AB∥CD.

∴∠ABE＝∠CDE，∠BAE＝∠DCE（内错角相等），∠AEB＝∠CED（对顶角相等），且四边形 ABCD 为梯形.

∵在△ABE 和△CDE 中$\begin{cases}\angle ABE=\angle CDE\\ \angle BAE=\angle DCE\\ \angle AEB=\angle CED\end{cases}$.

∴△ABE∽△CDE（AAA）.

∵相似三角形的一切对应线段的比等于相似比.

∴AB∶CD＝4∶8＝1∶2. 即相似比为 1∶2.

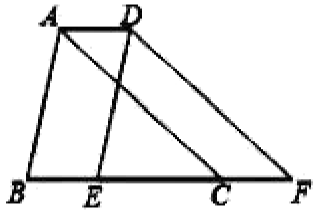
∵$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot EF=\frac{1}{2}\times 4\cdot EF=4$.

∴EF＝2. ∵EF∶EG＝1∶2. ∴EG＝4.

因此，$S_{梯形ABCD}$＝（上底＋下底）×高×$\frac{1}{2}$＝（AB＋CD）（EF＋EG）×$\frac{1}{2}$＝（4＋8）×（2＋4）×$\frac{1}{2}$＝36.

故选 D.

【模拟训练】如图所示，将面积为 10 cm^2的△ABC 沿 BC 方向平移 2 cm，得到△DEF，连接 AD，测得 EC＝3 cm，则梯形 ABFD 的面积为【B】



A. 16 cm^2

B. 18 cm^2

C. 20 cm^2

D. 22 cm^2

E. 24 cm^2

【解析】∵将面积为 10 cm^2的△ABC 沿 BC 方向平移 2 cm，得到△DEF，连接 AD，测得 EC＝3 cm.

∴BE＋EC＝2＋3＝5 cm.

∴梯形的高＝△ABC 的高＝$\frac{2\times10}{5}$＝4 cm.

∴梯形 ABFD 的面积＝10＋2×4＝18 cm^2. 故选 B.

第三节 圆与扇形

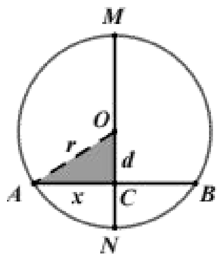
知识点讲解

（一）圆

1. 圆的直径： $d=2r$；圆的周长：$C_{周长}=2\cdot\pi\cdot r$；圆的面积：$S_{圆}=\pi\cdot r^2$（半径为 r）.

2. 圆周角定理： 直径对应的圆周角为直角；同一段弦对应的圆周角相同；同一段弦对应的圆心角是圆周角的 2 倍.

3. 垂径定理： 垂直于弦的直径平分弦，并且平分弦所对的两条弧.

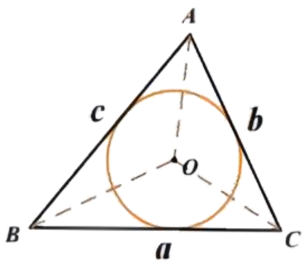


如图，直径 MN 平分且垂直 AB：$r^2=d^2+x^2$.

【口诀】有弦先连弦心距，垂直平分用勾股.

4. 三角形内切圆

与三角形各边都相切的圆叫做三角形的内切圆，内切圆的圆心是三角形三条角平分线的交点，叫做三角形的内心，内心到各边距离相等.



相关性质：

（1）三角形面积 $S=\frac{1}{2}(a+b+c)r_{内}=\frac{1}{2}r_{内}C_{周长}$；

（2）在直角三角形中，$r_{内}=\frac{a+b-c}{2}$；

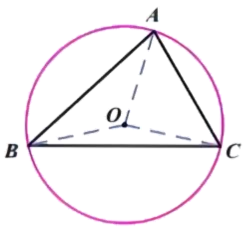
（3）在等边三角形中，$r_{内}=\frac{\sqrt{3}a}{6}$.

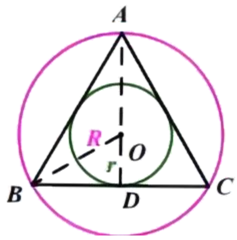
5. 三角形的外接圆

如果一个三角形的所有顶点都在同一个圆上，这个圆叫做这个三角形的外接圆. 外接圆的

圆心称为外心，是底边中垂线的交点.

三角形外心到各顶点的距离相等，等边三角形的外接圆与内切圆半径之比为 2：1.





（二）扇形

1. 扇形面积：$S_{扇形}=\dfrac{\alpha^\circ}{360^\circ}\cdot\pi\cdot r^2=\dfrac{1}{2}\cdot l\cdot r$.

2. 扇形弧长：$l=\dfrac{\alpha^\circ}{360^\circ}\cdot 2\cdot\pi\cdot r$.

（α 为扇形角的角度，r 为扇形半径）

题型考法

【真题题型 1】圆与扇形的面积计算

（一）命题特点

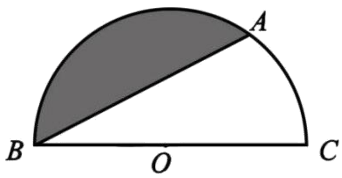
考查圆与扇形的相关面积的计算，可单独考查也可与其他图形（如三角形、平行四边形等）结合考查. 需要熟练掌握圆与扇形的相关公式.

（二）解题思路

1. 若所求的面积部分为标准的圆或扇形，直接代入公式计算即可.

2. 若要求的面积是圆或扇形的不规则的一部分，可使用割补法将其转化成规则图形的面积进行计算.

【真题重现】（2015）如图，BC 是半圆的直径，且 BC＝4，∠ABC＝30°，则图中阴影部分的面积为【A】



A. $\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

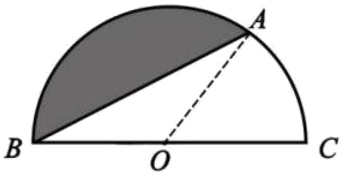
B. $\dfrac{4}{3}\pi-2\sqrt{3}$

C. $\dfrac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$

D. $\frac{2}{3}\pi+2\sqrt{3}$

E. $2\pi-2\sqrt{3}$

【解析】根据取 BC 的中点 O 为圆心，连接 OA，可画图，如图所示.



由题意得，$S_{阴影}=S_{扇形AOB}-S_{\Delta AOB}$.

$\because OA=OB=OC=\frac{1}{2}BC=2$. $\therefore \angle AOC=2\angle ABC=60°$，$\angle AOB=120°=\frac{2\pi}{3}$.

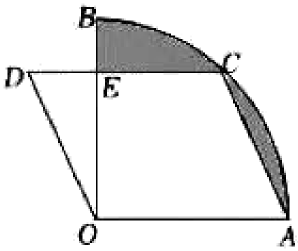
因此，$S_{扇形AOB}=\frac{n}{360°}\pi r^2=\frac{120°}{360°}\pi 2^2=\frac{4}{3}\pi$.

$\because OA=OB=2$，$\angle AOB=120°=\frac{2\pi}{3}$.

$\therefore S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot \sin\angle AOB=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times \sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times \frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

即$S_{阴影}=S_{扇形AOB}-S_{\Delta AOB}=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$. 故选 A.

【模拟训练】如图所示，扇形 AOB 圆心角为直角，OA=10，点 C 在$\overset{\frown}{AB}$上，以 OA，CA 为邻边构造平行四边形 ACDO，边 CD 交 OB 于点 E，若 OE=8，则图中两块阴影部分的面积和为【D】



A. $5\pi-8$

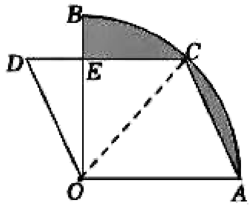
B. $10\pi-8$

C. $15\pi-8$

D. $25\pi-64$

E. $50\pi-64$

【解析】根据题意可画图，连接 OC，如图所示.



∵四边形 OACD 是平行四边形.

∴OA∥CD. ∴∠OEC+∠EOA=180°.

∵∠AOB=90°.

∴∠OEC=90°. ∴EC=$\sqrt{OC^2-OE^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$.

∴$S_{阴影}=S_{扇形AOB}-S_{梯形OECA}=\frac{90°\times\pi\times10^2}{360°}-\frac{1}{2}\times(6+10)\times8=25\pi-64$. 故选 D.

【真题题型 2】内切圆

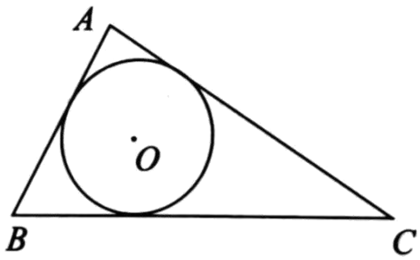
（一）命题特点

该类题型较为综合，常以三角形为背景命题，考查三角形的内切圆，并结合其他题型进行命题.

（二）解题思路

连接切点和圆心，构造直角三角形用勾股定理求解.

【真题重现 1】（2018）如图，圆 O 是三角形 ABC 的内切圆，若三角形 ABC 的面积与周长的大小之比为 1∶2，则圆 O 的面积为【A】



A. π

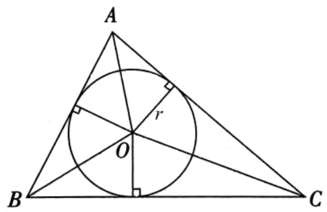
B. 2π

C. 3π

D. 4π

E. 5π

【解析】根据题意，设圆 O 的半径为 r，连接三角形顶点和圆心可画图，如图所示.



则由三角形面积公式得：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot r+\frac{1}{2}\cdot BC\cdot r+\frac{1}{2}\cdot AC\cdot r=\frac{1}{2}\cdot r\cdot(AB+BC+AC)$.

由三角形周长公式得：$C_{\triangle ABC}=AB+BC+AC$.

$\because S_{\triangle ABC}:C_{\triangle ABC}=1:2$. $\therefore \frac{1}{2}\cdot r\cdot(AB+BC+AC):AB+BC+AC=1:2\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot r=\frac{1}{2}\Rightarrow r=1$.

因此，由圆的面积公式得：$S_{圆O}=\pi r^2=\pi 1^2=\pi$. 故选 A.

【真题重现 2】（2024）在边长为 2 的正三角形中材料中，裁剪出一个半圆形，已知半圆的直径在三角形的一条边上，则这个半圆的面积最大为____.【A】

A. $\frac{3}{8}\pi$

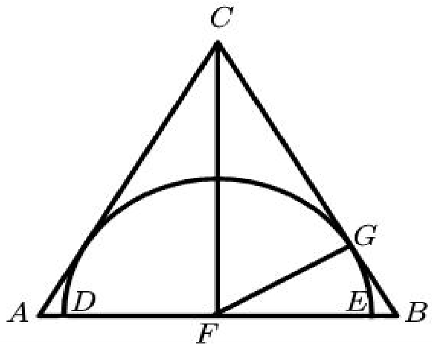
B. $\frac{3}{5}\pi$

C. $\frac{3}{4}\pi$

D. $\frac{\pi}{4}$

E. $\frac{\pi}{2}$

【解析】要求圆的面积就要求圆的半径. 如图，当半圆和正三角形的另外两条边相切时，圆的半径最大，即圆的面积最大，此时圆心在边 AB 的中点上.



如图，因为半圆与正三角形的边 BC 相切，所以圆心 F 到切点 G 的连线 FG 垂直于 BC，所以 $\angle FGB=90°$，又因为三角形 ABC 是正三角形，所以 $\angle CBA=60°$，所以在直角三角形 FGB 中，$\angle GFB=30°$. 又因为点 F 是 AB 中点，正三角形边长为 2，所以 $FB=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times2=1$. 所以

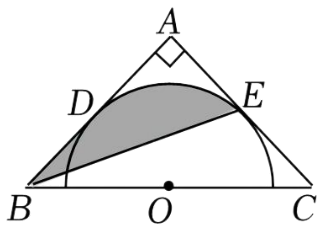
$GB=\frac{1}{2}FB=\frac{1}{2}$.（直角三角形中 30° 角所对的边是斜边长的一半）.

根据勾股定理，圆的半径 $FG=\sqrt{FB^2-GB^2}=\sqrt{1^2-(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

此时半圆的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot\pi r^2=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{3}{8}\pi$.

故选 A.

【模拟训练】如图所示，在△ABC 中，∠A＝90°，AB＝AC，点 O 是边 BC 的中点，半圆 O 与△ABC 相切于点 D、E，若阴影部分的面积为 $\frac{\pi}{4}$，则 AB 的长为【A】



A. 2

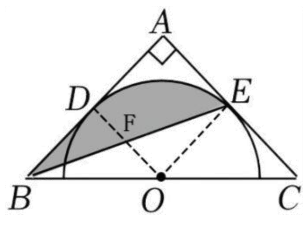
B. $2\sqrt{2}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

E. 3

【解析】根据题意，连接 OD，OE，且设 OD 和 BE 相交于点 F，如图所示.



∵半圆 O 与△ABC 相切于点 D、E.

∴OD⊥AB，OE⊥AC.

∵在△ABC 中，∠A＝90°，AB＝AC.

∴四边形 ADOE 是正方形，△OBD 和△OCE 是等腰直角三角形.

∴OD＝OE＝AD＝BD＝AE＝EC. ∠ABC＝∠EOC＝45°. AB∥OE. ∠DBF＝∠OEF.

∵在△BDF 和△EOF 中，$\begin{cases}\angle DBF=\angle OEF\\ \angle BFD=\angle EFO\\ BD=OE\end{cases}$.

∴△BDF≌△EOF（AAS）.

∴$S_{阴影}=S_{扇形DOE}=\frac{90°}{360°}\times\pi\times OD^2=\frac{\pi}{4}$.

解得：OD=1 或 OD=−1（负值舍去）.

∴AB=2·OD=2. 故选 A.

【真题题型 3】外接圆

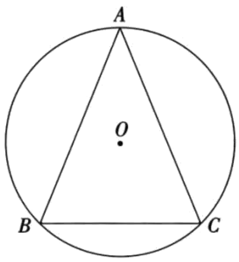
（一）命题特点

该类题型较为综合，常以三角形为背景命题，考查三角形的外接圆，并结合垂径定理、圆周角定理等进行命题.

（二）解题思路

连接圆心和三角形顶点，结合垂径定理、圆周角定理等进行分析求解.

【真题重现】（2020）如图，圆 O 的内接△ABC 是等腰三角形，底边 BC=6，顶角为$\frac{\pi}{4}$，则圆 O 的面积为【C】



A. 12π

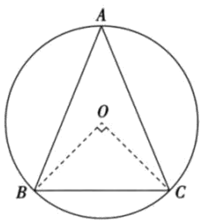
B. 16π

C. 18π

D. 32π

E. 36π

【解析】根据题意，连接 OB，OC，如图所示.



OB，OC 均为圆 O 的半径.

∵已知$\angle BAC=\frac{\pi}{4}$且同弧所对的圆心角是圆周角的 2 倍.

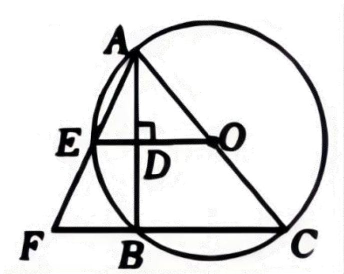
∴$\angle BOC=2\angle BAC=\frac{\pi}{2}=90^\circ$．即三角形 BOC 为等腰直角三角形.

在等腰直角三角形 BOC 中，BC=6，OB=OC. 由勾股定理得：

$OB^2+OC^2=BC^2\Rightarrow OB^2+OC^2=36\Rightarrow OB^2=OC^2=18\Rightarrow OB=OC=3\sqrt{2}$，即 $r=3\sqrt{2}$.

故圆 O 的面积为 $S=\pi r^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2\pi=18\pi$. 故选 C.

【模拟训练】如图所示，圆 O 是直角三角形 ABC 的外接圆，OE⊥AB 交圆 O 于点 E，垂足为点 D，AE，CB 的延长线交于点 F. 则 FC=10.【C】



（1）OD=3.

（2）AB=8.

【解析】∵圆 O 是直角三角形 ABC 的外接圆.

∴AC 是圆 O 的直径. 即 OA=OC.

又∵OE⊥AB 交圆 O 于点 E.

∴OE 是圆 O 的半径. 即 OE=OA=OC.

∵OE⊥AB.

∴$\angle ADO=90^\circ$．

∵$\angle ABC=90^\circ$．

∴$\angle ABC=\angle ADO=90^\circ$．∴OD∥BC.

∵OA=OC.

∴$AD=DB=\frac{1}{2}AB$. $AE=EF=\frac{1}{2}AF$. ∴OE 是△AFC 的中位线.

∴CF=2OE.

条件（1），OD=3. 已知条件不足，则不能确定 FC 的长度. 故条件（1）不充分.

条件（2），AB=8. 已知条件不足，则不能确定 FC 的长度. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合得：OD=3，$AB=8\Rightarrow AD=\frac{1}{2}AB=4$. 在直角三角形 ADO 中，$AO=\sqrt{AD^2+OD^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，则 CF=2OE=10. 故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

【真题题型 4】不规则图形面积

（一）命题特点

题目所给的要求面积的图形是不规则图形，但可将其转化成规则图形的面积.

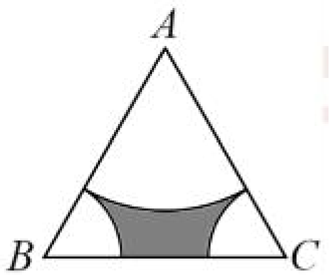
（二）解题思路：

1. 割补法：将所求不规则图形转化成常见的标准几何图形（如三角形、矩形、扇形等）进行计算. 常做辅助线有：对称轴、对角线、连接交点等.

2. 当所求图形为几个相同部分的组合时，可通过割补法求出一个部分的面积，再乘部分的个数或把几个相同的部分通过拼接组成一个常见的标准几何图形.

3. 平移法：有些图形可通过平移转化成标准几何图形，再求解.

【真题重现 1】（2024）如图，正三角形 ABC 边长为 3，以 A 为圆心，以 2 为半径作圆弧，再分别以 B,C 为圆心，以 1 为半径作圆弧，则阴影面积为____. 【B】



A. $\frac{9}{4}\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

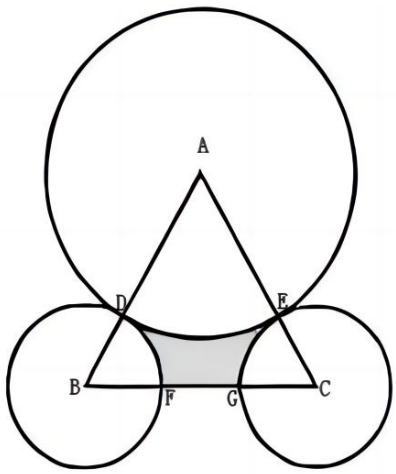
B. $\frac{9}{4}\sqrt{3}-\pi$

C. $\frac{9}{8}\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

D. $\frac{9}{8}\sqrt{3}-\pi$

E. $\frac{3}{4}\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

【解析】如图，阴影面积为正三角形面积减去一个圆心角为 60°，弧长为 2 的扇形面积，再减去两个圆心角为 60°，弧长为 1 的扇形面积.



即： $S_{阴影DEGF}=S_{三角形ABC}-S_{扇形ADE}-S_{扇形BDF}-S_{扇形CGE}$

$S_{三角形ABC}=\frac{1}{2}\times3\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$,

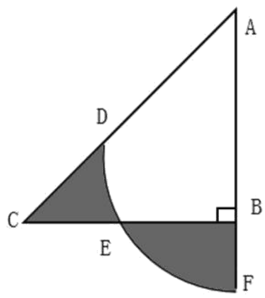
$S_{扇形ADE}=\frac{60\cdot\pi\cdot2^2}{360}=\frac{2}{3}\pi$,

$S_{扇形BDF}=S_{扇形CGE}=\frac{60\cdot\pi\cdot1^2}{360}=\frac{1}{6}\pi$.

所以 $S_{阴影DEGF}=\frac{9\sqrt{3}}{4}-\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{6}\pi\times2=\frac{9\sqrt{3}}{4}-\pi$.

故选 B.

【真题重现 2】（2022）如图所示，△ABC 是等腰直角三角形，以 A 为圆心的圆弧交 AC 于 D，交 BC 于 E，交 AB 的延长线于 F，若曲边三角形 CDE 的面积与 BEF 的面积相等，则 $\frac{AD}{AC}$ =【E】



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

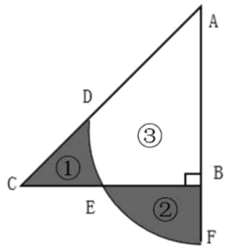
C. $\sqrt{\dfrac{3}{\pi}}$

D. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

E. $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$

【解析】

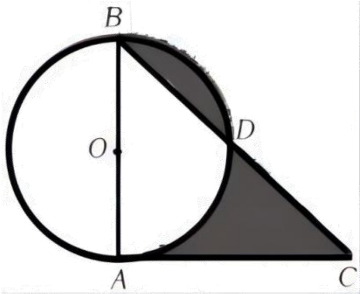
方法一：根据题意可设 AB＝BC＝1，则 AC＝$\sqrt{2}$，由于曲边三角形 CDE 的面积与 BEF 的面积相等，则$S_{①}+S_{③}=S_{②}+S_{③}$，即扇形$S_{扇\ ADF}=S_{\triangle ABC}$，$\dfrac{45°}{360°}\cdot\pi\cdot AD^2=\dfrac{1}{2}\times1\times1$，可得$AD^2=\dfrac{4}{\pi}$，所以$\dfrac{AD^2}{AC^2}=\dfrac{2}{\pi}\Rightarrow\dfrac{AD}{AC}=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.



方法二：由于△ABC 是等腰直角三角形，因此斜边 AC 上的高为斜边 AC 的$\dfrac{1}{2}$，由于曲边三角形 CDE 的面积与 BEF 的面积相等，即扇形$S_{扇\ ADF}=S_{\triangle ABC}$，可得$\dfrac{45°}{360°}\cdot\pi\cdot AD^2=\dfrac{1}{2}AC\times\dfrac{1}{2}AC$，因此$\dfrac{\pi}{8}AD^2=\dfrac{1}{4}AC^2$，即$\dfrac{AD^2}{AC^2}=\dfrac{2}{\pi}\Rightarrow\dfrac{AD}{AC}=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

故选 E.

【模拟训练】如图所示，在⊙O 中，直径 AB＝2，CA 切⊙O 于 A，BC 交⊙O 于 D，若∠C＝45°，则阴影部分的面积为【A】



A. 1

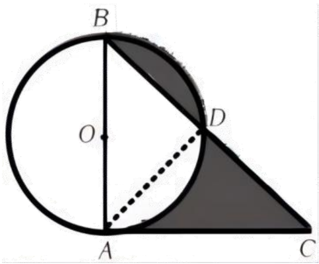
B. 2

C. $\sqrt{10}$

D. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

E. $\frac{\pi}{4}$

【解析】根据题意可画图，连接 AD，如图所示.



$\because$CA 切⊙O 于 A. $\therefore AB\perp AC$. $\therefore \angle BAC=90^\circ$.

$\because \angle C=45^\circ$. $\therefore \angle B=90^\circ-45^\circ=45^\circ$. $\therefore AC=AB=2$.

$\because$AB 是直径. $\therefore \angle ADB=90^\circ$. 即 $AD\perp BC$.

$\therefore CD=BD$. $\therefore AD=\frac{1}{2}BC=BD=CD$. $\therefore \widehat{AD}=\widehat{BD}$.

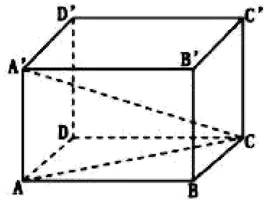
$\therefore S_{阴影}=S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times2\times2=1$.

故选 A.

第四节 立体几何

知识点讲解

（一）长方体



全面积：$F=2(ab+bc+ac)$；

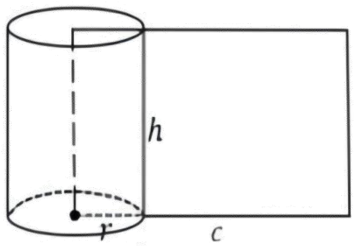
体积：$V=abc$；

体对角线：$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$；

所有棱长和：$l=4(a+b+c)$（a，b，c 为 3 条相邻的棱边长）.

当$a=b=c$时，长方体称为正方体.

（二）圆柱体



体积：$V=\pi r^2h$；

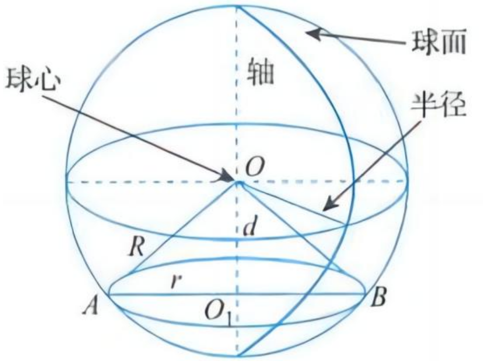
侧面积：$S=2\pi rh$；

表面积：$F=S_{侧}+2S_{底}=2\pi rh+2\pi r^2$（高为$h$，底面半径为$r$）.

（三）球体

1. 体积：$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，表面积：$S=4\pi r^2$（r 为球半径）.

2. 球的截面：球心与截面圆心的连线垂直于截面，设球心到截面的距离为 d、球的半径为 R、截面的半径为 r，则有$r^2+d^2=R^2$.



3. **外接球和内切球：**

	内切球（半径为R）	外接球（半径为R）
长方体	无，只有正方体才有	体对角线$l=2R$
正方体	棱长$a=2R$	体对角线$l=2R$（$2R=\sqrt{3}a$）
圆柱（底面半径为r，高为h）	只有轴截面是正方形的圆柱才有内切球，此时有$2r=h=2R$；内切球经过球心的横截面为圆柱的底面	$\sqrt{h^2+(2r)^2}=2R$

题型考法

【真题题型 1】长方体

（一）解题思路

掌握长方体的体对角线、表面积和体积的公式进行分析计算即可.

【真题重现】（2020）在长方体中，能确定长方体的体对角线长度.【D】

（1）已知长方体一个顶点的三个面的面积.

（2）已知长方体一个顶点的三个面的对角线长度.

【解析】设长方体的长、宽、高分别为 a，b，c，则其对角线的长度为$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

条件（1），已知长方体一个顶点的三个面的面积，不妨设三个面的面积分别为 x，y，z，

则有：$\begin{cases}ab=x\\ac=y\\bc=z\end{cases}$，则 abc=$\sqrt{xyz}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{\sqrt{xyz}}{z}\\b=\dfrac{\sqrt{xyz}}{y}\\c=\dfrac{\sqrt{xyz}}{x}\end{cases}$，则体对角线$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$的值可以确定. 故条件（1）充分.

条件（2），已知长方体一个顶点的三个面的对角线长度，不妨设三个面的对角线长度分别为 x，y，z，则有：$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=x\\\sqrt{a^2+c^2}=y\\\sqrt{b^2+c^2}=z\end{cases}$，则$\begin{cases}a^2+b^2=x^2\\a^2+c^2=y^2\\b^2+c^2=z^2\end{cases}$，所以$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}}$，则体对角线$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$的值可以确定.故条件（2）充分.

综上，故选 D.

【模拟训练】长方体的体对角线为a，则表面积为$2a^2$.【A】

（1）长方体的棱长之比为 1∶1∶1.

（2）长方体的棱长之比为 1∶2∶3.

【解析】

条件（1），已知长方体的棱长之比为 1∶1∶1，假设长方体的棱长均为 x，则体对角线$a=\sqrt{x^2+x^2+x^2}=\sqrt{3x^2}$，表面积为$2\left(x^2+x^2+x^2\right)=2a^2$.故条件（1）充分.

条件（2），已知长方体的棱长之比为 1∶2∶3，假设长方体的三条棱长分比为 x，$2x$，$3x$，则体对角线$a=\sqrt{x^2+(2x)^2+(3x)^2}=\sqrt{14x^2}$，表面积为$2\left(2x^2+3x^2+6x^2\right)=22x^2\neq 2a^2$.故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

【真题题型 2】圆柱

（一）解题思路

掌握圆柱的侧面积、表面积及体积的计算公式进行分析计算即可.

【真题重现 1】（2015）有一根圆柱形铁管，管壁厚度为 0.1 米，内径为 1.8 米，长度为 2 米.若将该铁管熔化后浇铸成长方体，则该长方体的体积为（单位：立方米；π ≈3.14）【C】

A. 0.38 m^3

B. 0.59 m^3

C. 1.19 m^3

D. 5.09 m^3

E. 6.28 m^3

【解析】铁管熔化后体积不变，求铸成长方体的体积，即求圆柱形铁管体积.

∵圆柱形铁管内径为 1.8 米，则内半径（r）为 1.8÷2=0.9 米，管壁厚度为 0.1 米.

∴铁管外半径（R）为 0.9+0.1=1 米.

因此，$V_{铁管}=V_{大圆柱}-V_{小圆柱}=\pi R^2 h-\pi r^2 h=\pi h(R^2-r^2)=3.14\times2\times(1^2-0.9^2)=1.1932\approx1.19\ m^3$. 故选 C.

【模拟训练 1】若圆柱的高增大到原来的 3 倍，则其体积增大到原来的 6.75 倍.【A】

（1）底面半径增大到原来的 1.5 倍.

（2）底面半径增大到原来的 2 倍.

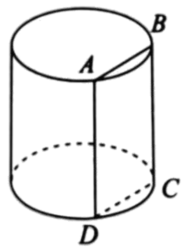
【解析】假设圆柱原来的半径为r，原来的高为h，则新圆柱的高为$3h$

条件（1），已知底面半径增大到原来的 1.5 倍，即新的底面半径为$1.5r$，则新圆柱的体积为$\pi(1.5r)^2\cdot3h=6.75\pi r^2h$. 故条件（1）充分.

条件（2），已知底面半径增大到原来的 2 倍，即新的底面半径为$2r$，则新圆柱的体积为$\pi(2r)^2\cdot3h=12\pi r^2h$，是原来的 12 倍. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

【真题重现 2】（2018）如图，圆柱体的底面半径为 2，高为 3，垂直于底面的平面截圆柱体所得截面为矩形$ABCD$. 若弦AB所对的圆心角为$\frac{\pi}{3}$，则截掉部分（较小部分）的体积为【D】



A. $\pi-3$

B. $2\pi-6$

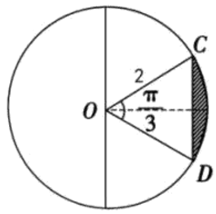
C. $\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

D. $2\pi-3\sqrt{3}$

E. $\pi-\sqrt{3}$

【解析】

根据题意可画图，如图所示.（提示：$\frac{\pi}{3}=60°$，等边三角形的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，a为边长）



通过水平横截面观察，可得所求柱体的底面为弓形（图中的阴影部分）.

则有：$S_{阴影}=S_{扇形COD}-S_{\triangle COD}=\dfrac{60°}{360°}\pi r^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}r^2=\dfrac{1}{6}\pi 2^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\dfrac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$.

因此，体积$V=S_{阴影}h=\left(\dfrac{2\pi}{3}-\sqrt{3}\right)\times 3=2\pi-3\sqrt{3}$. 故选 D.

【模拟训练 2】圆柱的高是 10，过底面圆心垂直切割，把圆柱分成相等的两半，则表面积增加 80.【A】

（1）圆柱的体积为40π .

（2）圆柱的体积为200π .

【解析】

把圆柱分成相等的两半后，增加的表面积为两个边长为高和底面直径的矩形的面积. 即 $2(2rh)=80$.

假设圆柱的底面半径为r，高为h，圆柱的体积$V=\pi r^2h$，则底面半径为$r=\sqrt{\dfrac{V}{\pi h}}$.

条件（1），已知$V=40\pi$，可得$r=\sqrt{\dfrac{40\pi}{\pi\cdot 10}}=2$，则表面积增加$2(2rh)=80$.

故条件（1）充分.

条件（2），已知$V=200\pi$，可得$r=\sqrt{\dfrac{200\pi}{\pi\cdot 10}}=2\sqrt{5}$，则表面积增加$2(2rh)=80\sqrt{5}$.

故条件（2）不充分

故选 A.

【真题题型 3】球体、外接球与内切球

（一）命题特点

真题中球体较少单独命题，通常是与其他几何体相结合构成外接球或内切球考查其体积或表面积或与其他题型如不等式相结合进行考查. 需熟练掌握球体的体积和表面积的基本公式、各种几何体的外接球和内切球公式.

（二）解题思路

解题的关键是找到几何体与外接球、内切球的等量关系，从而找到球体的半径，再代入相关公式计算.

【真题重现 1】（2013）将体积为 $4\pi\ cm^3$和 $32\pi\ cm^3$的两个实心金属球熔化后铸成一个实心大球，则大球的表面积为【B】

A. $32\pi\ cm^2$

B. $36\pi\ cm^2$

C. $38\pi\ cm^2$

D. $40\pi\ cm^2$

E. $42\pi\ cm^2$

【解析】

根据题意，大球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3=4\pi+32\pi=36\pi \Rightarrow R=3\ \text{cm}$.

则有$S_{球表面积}=4\pi R^2=4\pi\ 3^2=4\times9\times\pi=36\pi\ cm^2$. 故选 B.

【模拟训练 1】已知A，B，C为球O的球面上的三个点，$\odot O_1$为$\triangle ABC$的外接圆. 若$AB=BC=AC=OO_1$，$\odot O_1$的面积为 4π，则球O的表面积为【D】

A. 32π

B. 36π

C. 48π

D. 64π

E. 72π

【解题过程】

由$\odot O_1$的面积为 4π，则$\triangle ABC$的外接圆的半径为$r=2$.

又因为 AB=BC=AC，所以△ABC 为等边三角形，所以 $\frac{AB}{\sin\frac{\pi}{3}}=4$.

即 $AB=2\sqrt{3}$，故 $AB=BC=AC=OO_1=2\sqrt{3}$.

设球O的半径为R，则 $R^2=r^2+OO_1^2=16$.

即球O的表面积为 $4\times16\cdot\pi=64\pi$.

故选 D.

【真题重现 2】（2021）若球体的内接正方体的体积为 $8\ m^3$，则该球体的表面积为【D】

A. $4\pi\ m^2$

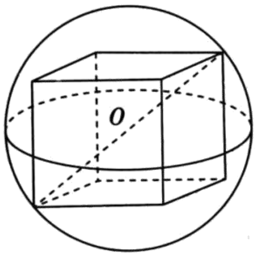
B. $6\pi\ m^2$

C. $8\pi\ m^2$

D. $12\pi\ m^2$

E. $24\pi\ m^2$

【解析】根据题意可画图，如图所示.



设正方体的棱长为 a.

∵正方体的体积为$a^3=8$.

∴解得 $a=2$.

∵正方体的体对角线为球的直径.

∴设正方体外接球的半径为 R. 则有 $\sqrt{3}a=2R \Rightarrow R=\sqrt{3}$.

所以球的表面积为 $S=4\pi R^2=4\pi(\sqrt{3})^2=12\pi$（$m^2$）. 故选 D.

【模拟训练 2】长方体 ABCD－$A_1B_1C_1D_1$中，若 AB＝5，AD＝4，$AA_1=3$，且此长方体内接于球 O，则球 O 的表面积为【D】

A. $20\sqrt{2}\pi$

B. $25\sqrt{2}\pi$

C. 25π

D. 50π

E. 200π

【解析】∵长方体 ABCD－$A_1B_1C_1D_1$中，AB＝5，AD＝4，$AA_1=3$.

∴长方体的对角线 $AC_1=\sqrt{AB^2+AD^2+AA_1^2}=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=5\sqrt{2}$.

∵长方体 ABCD－$A_1B_1C_1D_1$的各顶点都在同一球面上.

∴球的一条直径为 $AC_1=5\sqrt{2}$. 可得半径 $R=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

因此，该球的表面积为 $S=4\pi R^2=4\pi(\frac{5\sqrt{2}}{2})^2=50\pi$. 故选 D.

【真题题型 4】空间几何体截面问题

（一）命题特点

正方体、长方体、圆柱体、球体等被一个平面所截，求面积或体积问题，做题时要把截面单独在平面上画出来，不要直接在立体图形上做.

（二）解题思路

1. 基本思路： 截面问题通常需要先求出截面各边的长度、某个角的角度等，确定截面的特点，将其转化成平面图形后再进行计算.

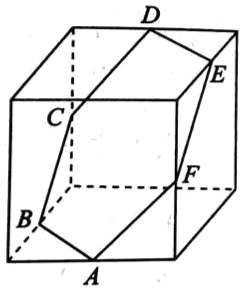
【基本截面特征】

（1）平行于底面的平面截圆柱体所得图形是圆；垂直于底面的平面截圆柱体所得图形是矩形.

（2）用一个平面截球体，截面是圆；经过球心的截面圆称为大圆.

2. 与球相关的截面问题: 通常构造与半径相关的直角三角形进行分析求解.

【真题重现 1】（2019）如图，六边形 ABCDEF 是平面与棱长为 2 的正方体所截得到的. 若 A，B，D，E 分别是相应棱的中点，则六边形 ABCDEF 的面积为【D】



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\sqrt{3}$

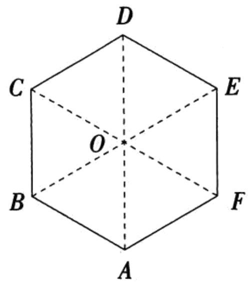
C. $2\sqrt{3}$

D. $3\sqrt{3}$

E. $4\sqrt{3}$

【解析】根据题意得，截出的六边形 ABCDEF 为正六边形，且边长为 DE$=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

根据题意可画图，连接正六边形的所有对角线. 如图所示.



正三角形的面积公式$S_{正三角形}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(边长)^2$.

因此，$S_{ABCDEF}=6S_{正三角形}=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=3\sqrt{3}$. 故选 D.

【模拟训练 1】在棱长为 a 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M、N、P 分别是正方形 ABCD、正方形BB_1C_1C和正方形ABB_1A_1的中心，则过点 M、N、P 的平面截正方体的截面面积为【B】

A. $2a^2$

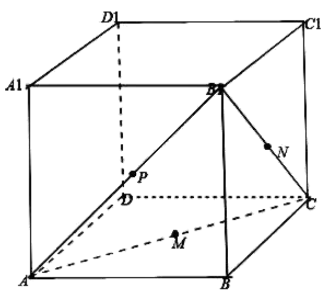
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

C. $3\sqrt{5}a^2$

D. $\frac{\sqrt{6}}{2}a^2$

E. $2\sqrt{3}a^2$

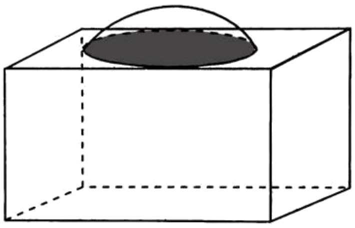
【解析】依题意，M、N、P 分别是正方形 ABCD、正方形BB_1C_1C和正方形ABB_1A_1的中心，即 M，N，P 分别为AB_1、B_1C、AC 的中点. 所以过点 M、N、P 的平面截正方体的截面为三角形AB_1C，如图所示.



因为正方体的棱长为 a. 所以三角形AB_1C的边长为$\sqrt{2}$a. 所以三角形AB_1C的面积为：S＝

$\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}a)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$. 故选 B.

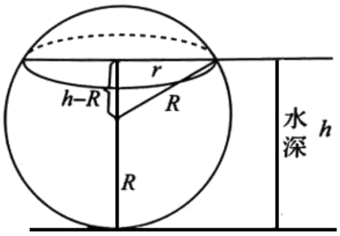
【真题重现 2】（2017）如图，一个铁球沉入水池中. 则能确定铁球的体积.【B】



（1）已知铁球露出水面的高度.

（2）已知水深及铁球与水面交线的周长.

【解析】根据题意可画图，如图所示.



条件（1），已知铁球露出水面的高度，但并不能确定此高度和半径的关系，故不能确定铁球的体积. 故条件（1）不充分.

条件（2），∵已知水深及铁球与水面交线的周长.

∴设水深为 h，铁球的半径为 R，铁球与水面的平面圆的周长为 C＝2πr.

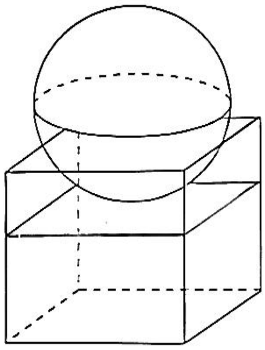
则球心到水面的距离为 h－R，铁球与水面的平面圆半径为 $r=\frac{C}{2\pi}$.

由图可得，铁球与水面的平面圆半径 r、球心到水面的距离 $h-R$ 和铁球的半径 R 构成直角三角形.

则由勾股定理得 $R^2=r^2+(h-R)^2\Rightarrow R=\frac{r^2+h^2}{2h}=\frac{(\frac{C}{2\pi})^2+h^2}{2h}$. 即铁球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ $=\frac{4}{3}\pi[\frac{(\frac{C}{2\pi})^2+h^2}{2h}]^3$. 因为 C 和 h 已知，所以能确定铁球的体积. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

【模拟训练 2】如图所示，有一个水平放置的透明无盖的正方体容器，容器高 8 厘米，将一个球放在容器口，再向容器内注水，当球面恰好接触水面时测得水深为 6 厘米，如果不计容器的厚度，则球的体积为____立方厘米.【B】



A. $\frac{866}{3}\pi$

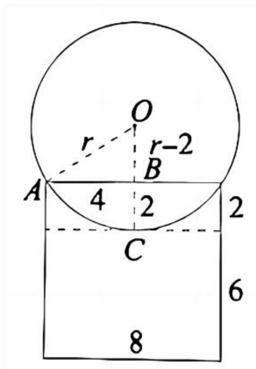
B. $\frac{500}{3}\pi$

C. $\frac{1372}{3}\pi$

D. $\frac{1000}{3}\pi$

E. 400π

【解析】该容器的剖面图如图所示



设球的半径为 r 厘米，则 $OA=OC=r$ 厘米，$AB=4$ 厘米，$BC=2$ 厘米，$OB=r-2$ 厘米.

在 Rt△OAB 中，$(r-2)^2+4^2=r^2$，解得 $r=5$.

故球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi\times5^3=\frac{500}{3}\pi$ 立方厘米. 故选 B.

【真题题型 5】与水有关的体积问题

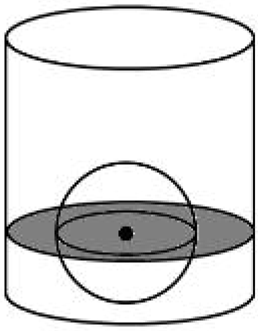
（一）命题特点

将某一几何体放入另一个装满水的几何体中，根据水面的高度变化求液面高度、水的体积、几何体的体积等.

（二）解题思路

主要根据水的体积来建立等量关系求解.

【真题重现】（2024）如图，圆柱形容器的底面半径是$2r$，将半径为r的铁球放入容器后，液面的高度为r，液面原来的高度为____.【E】



A. $\frac{r}{6}$

B. $\frac{r}{3}$

C. $\frac{r}{2}$

D. $\frac{2}{3}r$

E. $\frac{5}{6}r$

【解析】根据题意可知，将半径为r的铁球放入容器后，液面的高度为r，所以液面浸没了半个球.半个球的体积等于水面上升形成的圆柱体即水柱的体积.

设液面原来的高度为x，则水面上升形成的圆柱体的体积$=4\pi r^3-4\pi x^3$，故有$\frac{1}{2}v_{球}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3=4\pi r^3-4\pi x^3$.，化简得：$r-x=\frac{1}{6}r$，即$x=\frac{5}{6}r$.

故选E.

【模拟训练】在一个直径为32的圆柱体盛水容器中，放入一个实心铁球后，水面升高了9（假设铁球完全浸没水中且水没有溢出）.【B】

（1）铁球的表面积为144π.

（2）铁球直径为24.

【解析】根据题意可知，圆柱的半径为16，铁球的体积等于水面上升形成的圆柱体即水柱的体积.则水柱的高为9.假设铁球的半径为r，可得$\frac{4}{3}\pi r^3=\pi\times16^2\times9\Rightarrow r=12$.

条件（1），已知球体的表面积$4\pi r^2=144\pi\Rightarrow r=6$.故条件（1）不充分.

条件（2），已知球体的直径为24，则半径为12.故条件（2）充分.

综上，故选B.

第五节 解析几何

知识点讲解

（一）基本公式

1. 两点距离公式：$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

2. 中点坐标公式：$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

3. 点到直线的距离：$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

4. 两平行直线之间的距离：$d=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

（二）直线方程

名称	已知条件	方程形式	说明
点斜式	直线过点 $P(x_1,y_1)$ 和斜率 k	$y-y_1=k(x-x_1)$	不包括 y 轴和平行于 y 轴的直线
斜截式	斜率 k 和直线在 y 轴的截距 b	$y=kx+b$	不包括 y 轴和平行于 y 轴的直线
截距式	直线在 x 轴上的截距 a（$a\neq 0$） 直线在 y 轴上的截距 b（$b\neq 0$）	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	不包括经过原点的直线以及平行于坐标轴的直线
两点式	直线过点 $P(x_1,y_1)$ 和点 $P(x_2,y_2)$（$x_1\neq x_2$，$y_2\neq y_1$）	$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$	不包括坐标轴和平行于坐标轴的直线
一般式	A、B 不同时为零	$Ax+By+C=0$	任何一条直线都可以写成此种形式

（三）圆的方程

1. 标准式

圆心为(x_0,y_0)，半径为 r 的圆可表示为：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

2. 一般式：$x^2+y^2+ax+by+c=0$.

（四）位置关系

1.两直线位置关系

	斜截式 l_1：$y=k_1x+b_1$； l_2：$y=k_2x+b_2$	一般式 l_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$； l_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$
平行	$l_1//l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$，$b_1\neq b_2$	$l_1//l_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$
相交	$k_1\neq k_2$	$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$
垂直	$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1$	$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}=-1 \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$

2.点与圆的位置关系

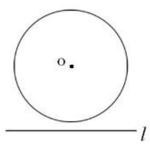
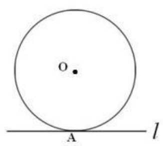
点 $P(x_p,y_p)$，圆 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$，则

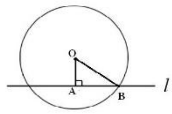
$$(x_p-x_0)^2+(y_p-y_0)^2\begin{cases}<r^2,\ \text{点在圆内.}\\=r^2,\ \text{点在圆上.}\\>r^2,\ \text{点在圆外.}\end{cases}$$

任意一点 P 到圆 O 上的最短距离为$d_{min}=|OP-r|$，最长距离为$d_{max}=|OP+r|$.

3.直线与圆的关系

直线l：$y=kx+b$；圆O：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$，d 为圆心(x_0,y_0)到直线l的距离.

直线与圆 位置关系	图形	成立条件 （几何表示）
相离		$d>r$
相切		$d=r$

相交		$d<r$

（五）对称

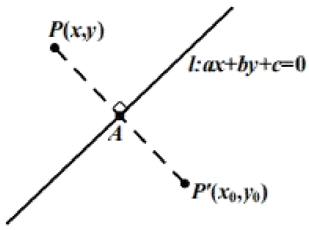
1. 点关于点对称

对称点为中点，利用中点坐标公式求解.

2. 点关于直线对称

A. $pp'\perp l$ 即斜率互为“负倒数”.

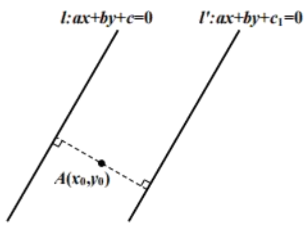
B. p 和 p' 的中点 A 在对称轴上即中点 A 满足对称轴方程.



3. 直线关于点对称

A. $l//l'$，即 l'：$ax+by+c_1=0$（这里只含有 c_1 一个未知数）.

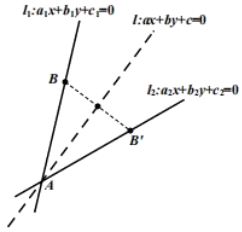
B. 对称点 A (x_0,y_0) 到直线 l 和 l' 距离相等（再利用点到直线距离公式可求 c_1）.



4. 直线关于直线对称

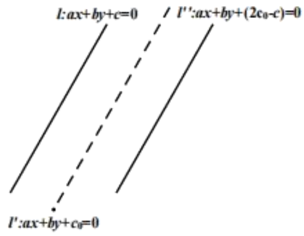
A. 三线共点，联立 l 与 l_1 求出点 A 坐标，其也满足 l_2 方程.

B. 在 l_1 上任取一点 B，求点 B 关于直线 l 对称的点 B'，点 B' 也满足 l_2 方程.



5. 平行直线对称

将对称轴视为“中点”，巧用中点坐标公式求解，l''： $ax+by+(2c_0-c)=0$.



题型考法

【真题题型 1】解析几何基本问题

（一）命题特点

考查解析几何的基本公式以及基本性质，如中点坐标、两点距离、点到直线距离、斜率问题、直线的方程、圆的方程等.

（二）解题思路

结合题目条件代入公式分析计算即可.

【真题重现 1】（2024）已知点$O(0,0)$， $A(a,1)$， $B(2,b)$， $C(1,2)$，若四边形$OABC$为平行四边形，则$a+b=$____. 【B】

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

E. 7

【解析】因为四边形$OABC$为平行四边形. 根据平行四边形的性质，平行四边形的对角线互相平分，所以OB的中点$=AC$的中点，因为OB的中点坐标为（$\frac{0+2}{2},\frac{0+b}{2}$），$AC$的中点坐标为（$\frac{a+1}{2},\frac{1+2}{2}$）. 所以有$\frac{0+2}{2}=\frac{a+1}{2}$， $\frac{0+b}{2}=\frac{1+2}{2}$，解得$a=1$，$b=3$. 所以$a+b=4$.

故选 B.

【模拟训练 1】已知点 A（1，-2），B（m，2），且线段 AB 的垂直平分线的方程是 $x+2y-2=0$, 则实数 m 的值是【C】

A. -2

B. -7

C. 3

D. 1

E. 2

【解析】易知线段 AB 的中点为（$\frac{1+m}{2}$,0）且该点在线段 AB 的垂直平分线上，将该点坐标代入直线方程可得$\frac{1+m}{2}+2\times0-2=0$，解得 $m=3$.

故选 C.

【真题重现 2】（2012）直线$y=ax+b$过第二象限.【A】

（1）$a=-1$，$b=1$.

（2）$a=1$，$b=-1$.

【解析】

条件（1），$a=-1$，$b=1\Rightarrow y=-x+1\Rightarrow$与$x$轴交点（1，0），与$y$轴交点（0，1）. 即直线过第一、二、四象限. 故条件（1）充分.

条件（2），$a=1$，$b=-1\Rightarrow y=x-1\Rightarrow$与$x$轴交点（1，0），与$y$轴交点（0，$-1$）. 即直线过第一、三、四象限. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

【模拟训练 2】已知直线$ax+3y-a-2=0$ 在x轴与y轴上的截距相等，则实数a的值为【C】.

A. -2

B. -3

C. -2 或 3

D. -2 或-3

E. 2 或 3

【解析】

令$x=0$，求得直线在y轴上的截距为 $y=\frac{a+2}{3}$；

令$y=0$，求得直线在x轴上的截距为 $x=\frac{a+2}{a}$. 因为直线在x轴和y轴上的截距相等，所以 $\frac{a+2}{3}=\frac{a+2}{a}$，解得$a=-2$ 或$a=3$.

综上，$a=-2$ 或$a=3$.

故选 C.

【真题重现 3】（2020）圆 $x^2+y^2=2x+2y$ 上的点到直线 $ax+by+\sqrt{2}=0$ 的距离最小值大于 1.【C】

（1）$a^2+b^2=1$.

（2）$a>0$，$b>0$.

【解析】

根据题意得，可将圆的方程化为标准式$(x-1)^2+(y-1)^2=2$，圆心为（1，1），半径为$\sqrt{2}$，圆上的点到直线 $ax+by+\sqrt{2}=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|a+b+\sqrt{2}|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，故其最小值 $d_{\min}=\left|\dfrac{|a+b+\sqrt{2}|}{\sqrt{a^2+b^2}}-\sqrt{2}\right|$.

条件（1），举反例：当$a=b=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，圆心到直线的距离为 $d=\dfrac{\left|-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\right|}{\sqrt{(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2+(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2}}=0$，直线与圆相交，最小距离为 0. 故条件（1）不充分.

条件（2），举反例：当$a=b=1$ 时，圆心到直线的距离为 $d=\dfrac{|1+1+\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}+1\Rightarrow d_{\min}=|\sqrt{2}+1-\sqrt{2}|=1$. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合得：

$$d_{\min}=\left|\frac{|a+b+\sqrt{2}|}{\sqrt{a^2+b^2}}-\sqrt{2}\right|=|a+b|=\sqrt{(a+b)^2}=\sqrt{a^2+2ab+b^2}>\sqrt{a^2+b^2}=1.$$

故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

【模拟训练 3】已知直线$y=x+b$与圆C：$(x-1)^2+(y-2)^2=1$，圆 C 上的任意一点到该直线的最大距离为$\sqrt{2}+1$.【D】

（1）$b=3$.

（2）$b=-1$.

【解析】

由题干可知圆 C 的圆心坐标为（1，2），半径为 1，则圆心 C（1，2）到直线 $y=x+b$ 的距离为 $\frac{|1+b-2|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}|b-1|$ 则圆 C 上的任意一点到该直线的最大距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}|b-1|+1$. 当圆 C 上的任意一点到该直线的最大距离为 $\sqrt{2}+1$ 时，$\frac{\sqrt{2}}{2}|b-1|+1=\sqrt{2}+1$，得 $b=-1$ 或 $b=3$.

条件（1），是上述解集的子集，条件（1）充分.

条件（2），是上述解集的子集，条件（2）充分.

故选 D.

【真题题型 2】解析几何面积问题

（一）命题特点

给出直线或圆的方程，求围成图形的面积.

（二）解题思路

一般使用图像法，根据题目所给方程画出相应的图像，然后再利用平面几何中的求面积公式（如三角形面积公式、扇形面积公式等）进行求解.

【真题重现】（2021）已知 ABCD 是圆 $x^2+y^2=25$ 的内接四边形，若 A，C 是直线 $x=3$ 与圆 $x^2+y^2=25$ 的交点，则四边形 ABCD 面积的最大值为【C】

A. 20

B. 24

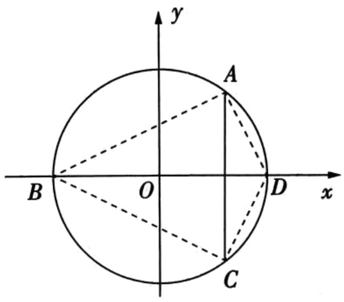
C. 40

D. 48

E. 80

【解析】由题意得 $\begin{cases}x^2+y^2=25\\x=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=\pm4\end{cases}$，圆的半径为 5. 因此 A（3，4），C（3，−4）$\Rightarrow |AC|=8$.

根据题意可画图，如图所示. 设三角形 ABC 和三角形 ADC 的高分别为 h_1，h_2.



由图可得：四边形 ABCD 可分为三角形 ABC 和三角形 ADC $\Rightarrow S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}$

$=\frac{1}{2}|AC|h_1+\frac{1}{2}|AC|h_2=4(h_1+h_2)$.

为了保证$S_{四边形ABCD}$最大，则$S_{\triangle ABC}$和$S_{\triangle ADC}$分别都要取最大值.

因为点 B 和点 D 为动态变化，所以当点 B 和点 D 分别在（−5，0）和（5，0）上时，两个三角形的面积同时最大. 即$|BD|=10$为圆的直径，则$S_{四边形ABCD}=4(h_1+h_2)=4\times10=40$.

故选 C.

【模拟训练】已知直线 l：$x-y+2=0$，点 A（0，0），B（1，1），点 C 为直线 l 上一动点，则△ABC 的面积为【A】

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

E. $\sqrt{5}$

【解析】由题意可得$k_{AB}=1$，则直线 AB 的方程为：$y=x$，

又直线 l 的方程为 $y=x+2$，则$k_l=1$，

所以直线 l // 直线 AB，所以两直线的距离为 $d=\frac{2}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$，$|AB|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，所以三角形 ABC 的面积为 $S=\frac{1}{2}\times d\times|AB|=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$

故选 A.

【真题题型 3】直线与直线位置关系

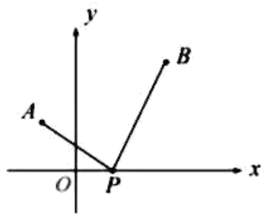
（一）命题特点

常见考查形式为判断两条直线的位置关系，或者已知两条直线的位置关系，求直线的方程、方程中参数的值或范围等.较少单独考查，通常与其他题型相结合.需要熟练掌握两条直线平行、相交、垂直时，直线的方程所满足的关系.

（二）解题思路

一般通过直线的斜率来分析直线与直线的位置关系，两直线平行则其斜率相等；两直线垂直则斜率相乘为-1.要注意斜率为 0 和斜率不存在的情况.

【真题重现】（2023）如图所示，已知点 $A(-1,2)$，点 $B(3,4)$，若点 $P(m,0)$ 使得 $|PB|-|PA|$ 最大，则【A】



A. $m=-5$

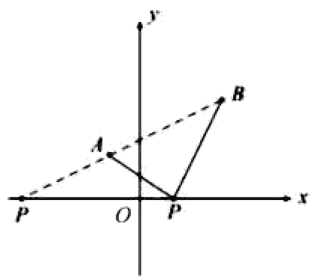
B. $m=-3$

C. $m=-1$

D. $m=1$

E. $m=3$

【解析】根据题意可画图，连接 P、A、B，如图所示.



根据三角形三边的性质，任意两边之差小于第三边可得：$|PB|-|PA|<|AB|$.

当 P、A、B 三点共线时，$|PB|-|PA|$ 可得最大值 $|AB|$.

又因为当 P、A、B 三点共线时直线 AB 平行于直线 PA，所以有：$\dfrac{4-2}{3-(-1)}=\dfrac{2-0}{(-1)-m}$，解得：$m=-5$.

故选 A.

【模拟训练】已知直线l_1：$(m-2)x-3y-1=0$与直线l_2：$mx+(m+2)y+1=0$相互平行，则实数 m 的值是.【A】

A. −4

B. 1

C. −1

D. 6

E. 0

【解析】因为$l_1//l_2$，所以$\frac{m-2}{m}=\frac{-3}{m+2}$，解得$m=-4$或$m=1$.

当$m=1$，直线l_1与直线l_2重合，要舍去. 因此，$m=-4$.

故选 A.

【真题题型 4】点与圆位置关系

（一）解题思路

代入相关公式进行计算即可.

【真题重现】（2016）圆$x^2+y^2-6x+4y=0$上到原点距离最远的点是【E】

A.（−3，2）

B.（3，−2）

C.（6，4）

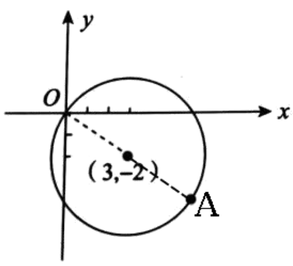
D.（−6，4）

E.（6，−4）

【解析】将圆的方程$x^2+y^2-6x+4y=0$转化为标准式$(x-3)^2+(y+2)^2=13$.

则圆心为（3，−2），半径为$\sqrt{13}$. 将原点（0，0）代入圆的方程可得原点在圆上.

根据上述内容可画图，如图所示.



则圆上到原点距离最远的点是点 A（过圆心的直径 OA）. 圆心是 OA 的中点.

可得点 A 的坐标是（6，−4）.

故选 E.

【模拟训练】原点到圆（x－1）^{2}＋（y＋2）^{2}＝9上的点的最短距离是【B】

A. $3+\sqrt{5}$

B. $3-\sqrt{5}$

C. $\sqrt{5}$

D. $3-\sqrt{3}$

E. 0

【解析】原点到圆心（1，－2）的距离为$\sqrt{(1-0)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{5}$. 圆的半径为3，则原点到圆的最短距离为$d_{min}=|\sqrt{5}-3|=3-\sqrt{5}$.

故选 B.

【真题题型 5】直线与圆位置关系

（一）命题特点

判断直线与圆的位置关系，或根据位置关系进行计算（求弦长、切线长、参数的值或范围、直线的方程等）. 一般较为常考的题型是已知直线与圆的位置关系求参数.

（二）解题思路

先求圆心到直线的距离 d，然后根据直线与圆的位置关系列出关系式：$d>r$，$d<r$或$d=r$，然后对相应的方程或不等式进行求解，从而求得参数的值或范围.

【真题重现 1】（2019）直线$y=kx$与圆$x^2+y^2-4x+3=0$有两个交点.【A】

（1）$-\frac{\sqrt{3}}{3}<k<0$.

（2）$0<k<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【解析】根据题意得，圆的方程可以转化为$(x-2)^2+y^2=1$，则圆心为（2，0），半径为1.

∵直线与圆有两个交点.

∴圆心到直线距离 $d=\frac{|2k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}<1$，解得：$-\frac{\sqrt{3}}{3}<k<\frac{\sqrt{3}}{3}$.

条件（1），$-\frac{\sqrt{3}}{3}<k<0$ 在 $-\frac{\sqrt{3}}{3}<k<\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的范围内. 故条件（1）充分.

条件（2），因为 $\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $0<k<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 超出了 $-\frac{\sqrt{3}}{3}<k<\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

【真题重现 2】（2018）设a，b为实数，则圆$x^2+y^2=2y$与直线$x+ay=b$不相交.【A】

（1）$|a-b|>\sqrt{1+a^2}$.

（2）$|a+b|>\sqrt{1+a^2}$.

【解析】

根据题意，将圆$x^2+y^2=2y$转化为圆的标准式$x^2+(y-1)^2=1\Rightarrow$圆心为（0，1），半径为1.

再分析：圆与直线不相交⇒圆与直线$\begin{cases}相切\Rightarrow 圆心到直线的距离等于圆的半径\\ 相离\Rightarrow 圆心到直线的距离大于圆的半径\end{cases}$的两种情况.

即圆心到直线的距离的关系为：$d\geqslant r\Rightarrow\frac{|a-b|}{\sqrt{1+a^2}}\geqslant 1\Rightarrow|a-b|\geqslant\sqrt{1+a^2}$.

条件（1），$|a-b|>\sqrt{1+a^2}$是$|a-b|\geqslant\sqrt{1+a^2}$的子集. 故条件（1）充分.

条件（2），举反例：$a=-1$，$b=-2$，$|a+b|>\sqrt{1+a^2}\Rightarrow|-1+(-2)|>\sqrt{1+(-1)^2}\Rightarrow 3>\sqrt{2}$.

则圆心到直线的距离$d=\frac{|-1-(-2)|}{\sqrt{1+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$，圆与直线相交. 即满足$|a+b|>\sqrt{1+a^2}$，但不符合结论圆与直线不相交. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

【真题重现 3】（2015）若直线 $y=ax$ 与圆$(x-a)^2+y^2=1$ 相切，则$a^2=$【E】

A. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

B. $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

D. $1+\frac{\sqrt{5}}{3}$

E. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

【解析】∵圆$(x-a)^2+y^2=1$.

∴圆心为（a，0），半径（r）为 1.

∵直线 $y=ax$ 与圆$(x-a)^2+y^2=1$ 相切.

∴直线与圆心的距离 $d=\frac{|a^2|}{\sqrt{a^2+1}}=r=1\Rightarrow a^4=a^2+1$.

令$a^2=t$，则$t^2=t+1\Rightarrow t^2-t-1=0\Rightarrow t=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

因为a^2为正数，所以$a^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

故选 E.

【真题重现 4】（2015）圆$x^2+y^2-ax-by+c=0$ 与x轴相切. 则能确定c的值.【A】

（1）已知a的值.

（2）已知b的值.

【解析】

方法一：根据圆$x^2+y^2-ax-by+c=0$ 可整理得$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$.

则圆心为（$\frac{a}{2}$，$\frac{b}{2}$），半径为$\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$.

∵圆与x轴相切$\Rightarrow d=r$.

∴$d=\left|\frac{b}{2}\right|=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=r$. 两边同时平方后化简得：$c=\frac{a^2}{4}$.

由此可得：c的值与a有相关关系.

条件（1），已知a的值，可以确定c的值. 故条件（1）充分.

条件（2），已知b的值，无法确定c的值. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

方法二：根据题意可联立方程得：$\begin{cases} x^2+y^2-ax-by+c=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x^2-ax+c=0$.

则$\Delta=b^2-4ac=(-a)^2-4\cdot 1\cdot c=a^2-4c=0$.

由此可得：c的值与a有相关关系.

条件（1），已知a的值，则$\Delta=a^2-4c=0$，可以确定c的值.故条件（1）充分.

条件（2），已知b的值，无法确定c的值.故条件（2）不充分.

综上，故选A.

【模拟训练1】已知直线l过点（-2，0），则直线l与圆$x^2+y^2=2x$有两个交点.【D】

（1）直线l的斜率k的取值范围为$0<k<\frac{\sqrt{2}}{4}$.

（2）直线l的斜率k的取值范围为$-\frac{\sqrt{2}}{4}<k<0$.

【解析】

由题干，将圆化为标准式为$(x-1)^2+y^2=1$，圆心在（1，0）点，半径为1.

设直线l的斜率为k，由于直线过点（-2，0），因此：$y=k(x+2)$，即$kx-y+2k=0$.

由于圆与直线有2个交点，即直线与圆相交，因此圆心到直线的距离为$\frac{|k+2k|}{\sqrt{k^2+1}}<1$，解得$-\frac{\sqrt{2}}{4}<k<\frac{\sqrt{2}}{4}$.

条件（1），是上述解集的子集，条件（1）充分.

条件（2），是上述解集的子集，条件（2）充分.

综上，故选D.

【模拟训练2】m=1.【E】

（1）直线x+y+m=0与圆$x^2+y^2-2x-1=0$相切.

（2）直线x+y+m=0与圆$x^2+y^2-2x-1=0$相交.

【解析】

∵圆$x^2+y^2-2x-1=0$

∴$(x-1)^2+y^2=2$，圆心坐标是（1，0），半径$r=\sqrt{2}$.

∴圆心（1，0）到直线的距离$d=\frac{|1+m|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$，解得m=1或m=－3.

条件（1），∵直线 $x+y+m=0$ 与圆相切

$\therefore d=\frac{|1+m|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$，解得 $m=1$ 或 $m=-3$.

不能推出 $m=1$ 恒成立，条件（1）不充分.

条件（2），∵直线 $x+y+m=0$ 与圆相交∴$d<\sqrt{2}$，不能推出 $m=1$ 恒成立，条件（2）不充分.

综上，故选 E.

【模拟训练 3】设直线的斜率为 k，并且直线过点（0，-1），则该直线与圆 $x^2+y^2-4x+3=0$ 有且仅有一个交点.【B】

（1）$\frac{1}{3}\leqslant k<1$.

（2）$k=\frac{4}{3}$

【解析】

根据题干，直线方程表示为 $y+1=kx$.

将圆的一般方程化为圆的标准方程得 $(x-2)^2+y^2=1$，圆心坐标为（2，0），$r=1$.

直线与圆有且仅有一个交点，说明直线与圆相切，即 $d=\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，即 $4k^2-4k+1=k^2+1$，解得 $k=\frac{4}{3}$ 或 $k=0$.

条件（1），由 $\frac{1}{3}\leqslant k<1$ 不能推出 $k=\frac{4}{3}$，条件（1）不充分.

条件（2），与题干一致，条件（2）充分.

综上，故选 B.

【真题题型 6】对称

（一）命题特点

题目一般会有较明显的“对称”字眼. 实质上是点关于直线对称，

（二）解题思路

1. 点与点，点与直线间的对称问题，代入公式即可.

2. 圆关于直线对称的问题，实质是点（圆心）关于直线对称的问题，且对称的两个圆的半径相等. 由圆心坐标关于直线对称解出圆心坐标，由半径相等得半径，从而能写出对称的圆的方程.

【真题重现 1】（2013）点（0，4）关于直线 $2x+y+1=0$ 的对称点为【E】

A.（2，0）

B.（−3，0）

C.（−6，1）

D.（4，2）

E.（−4，2）

【解析】

根据题意，设对称点坐标为（a，b），因此中点坐标为（$\frac{a}{2}$，$\frac{b+4}{2}$）.

则有$\begin{cases}2\times\frac{a}{2}+\frac{b+4}{2}+1=0\\ \frac{b-4}{a}\times(-2)=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-4\\ b=2\end{cases}$. 即对称点为（−4，2）. 故选 E.

【真题重现 2】（2019）设圆 C 与圆 $(x-5)^2+y^2=2$ 关于直线 $y=2x$ 对称，则圆 C 的方程为【E】

A. $(x-3)^2+(y-4)^2=2$

B. $(x+4)^2+(y-3)^2=2$

C. $(x-3)^2+(y+4)^2=2$

D. $(x+3)^2+(y+4)^2=2$

E. $(x+3)^2+(y-4)^2=2$

【解析】根据题意得，$(x-5)^2+y^2=2$ 的圆心为（5，0）.

根据圆与圆对称的性质可知，两圆圆心对称，半径相等.

则设圆心（5，0）关于 y＝2x 的对称点为（a，b）.

则满足方程组$\begin{cases}\frac{0+b}{2}=2\cdot\frac{5+a}{2}\\ \frac{b-0}{a-5}\times2=-1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-3\\ b=4\end{cases}$，则圆 C 的圆心为（−3，4）.

即圆 C 的方程为 $(x+3)^2+(y-4)^2=2$. 故选 E.

【模拟训练 1】点 P（2，0）关于直线 l：x＋y＋1＝0 的对称点 Q 的坐标为【A】

A.（−1，−3）

B.（－1，－4）

C.（4，1）

D.（2，3）

E.（3,2）

【解析】

设Q（a，b）为关于直线l：x＋y＋1＝0的对称点

由题意可得$\begin{cases} \dfrac{a+2}{2}+\dfrac{b}{2}+1=0 \\ \dfrac{b}{a-2}=1 \end{cases}$，解得a＝－1，b＝－3，可得Q（－1，－3）．

故选A.

【模拟训练2】圆C：$(x-1)^2+(y-1)^2=2$关于直线l：y＝x－1对称后的圆的方程为【A】

A. $(x-2)^2+y^2=2$

B. $(x+2)^2+y^2=2$

C. $x^2+(y-2)^2=2$

D. $x^2+(y+2)^2=2$

E. $x^2+y^2=2$

【解析】圆C：$(x-1)^2+(y-1)^2=2$，则圆心C（1，1），半径r＝$\sqrt{2}$，

设圆心C（1，1）关于直线l：y＝x－1对称的点为C′（a，b），

则$\begin{cases} \dfrac{b-1}{a-1}=-1 \\ \dfrac{b+1}{2}=\dfrac{a+1}{2}-1 \end{cases}$，解得a＝2，b＝0.

∴圆C关于直线l：y＝x－1对称的圆的方程为$(x-2)^2+y^2=2$.

故选A.

第五章 数据分析

第一节 排列组合

知识点讲解

（一）基本计数原理

1. 分类加法计数原理

完成一件事有两类不同方案（两类不同方案中的方法互不相同），在第 1 类方案中有 m 种不同的方法，在第 2 类方案中有 n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m+n$ 种不同的方法.

2. 分步乘法计数原理

完成一件事需要两个步骤，做第 1 步有 m 种不同的方法，做第 2 步有 n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m\times n$ 种不同的方法.

内容	加法原理	乘法原理
本质	每类独立完成任务	缺少任何一步，都无法完成
特征	分成几类就有几项相加	分成几步就有几项相乘
符号	加号	乘号
应用	出现不确定或者互相干扰时，要分类	出现需要若干过程或环节才能完成时，要分步
并存	当分类与分步同时出现，一定要先宏观分类，再微观分步	

（二）排列组合

1. 排列： 从 n 个不同的元素中取出 m 个进行排序

$$P_n^m=A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

$A_n^n=n!$； $A_n^0=1$.

2. 组合： 从 n 个不同的元素中取出 m 个，无需考虑顺序

$$C_n^m=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots\cdot 2\cdot 1}=\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{A_n^m}{m!}.$$

$C_n^n=C_n^0=1$.

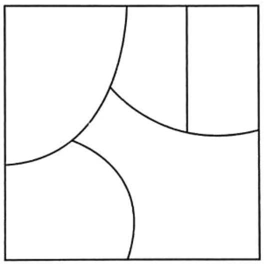
题型考法

【真题题型 1】基本计数原理

（一）解题思路

首先判断题目是需要分类求解还是分步求解.若是分类求解，则采用加法原理；若是分步求解，则采用乘法原理；若是分类与分步同时出现，则先分类，再分步.

【真题重现】（2022）如图所示，用 4 种颜色对图中五块区域进行涂色，每块区域涂一种颜色，且相邻的两块区域颜色不同，则不同的涂色方法有【E】



A. 12 种

B. 24 种

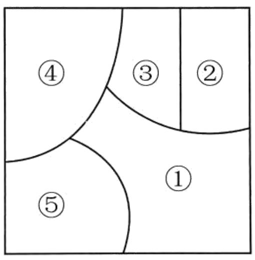
C. 32 种

D. 48 种

E. 96 种

【解析】

首先给题干图中的区域编号，如图所示.



第一步：给相邻区域最多的区域①上色，有 4 种涂法.

第二步：给区域②上色，有 3 种涂法（与区域①颜色不同）.

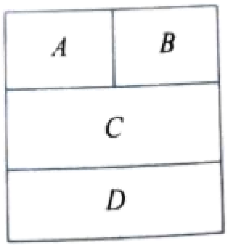
第三步：给区域③上色，有 2 种涂法（与区域①和区域②颜色不同）.

第四步：给区域④上色，有 2 种涂法（与区域①和区域③颜色不同）.

第五步：给区域⑤上色，有 2 种涂法（与区域①和区域④颜色不同）.

综上，使用分步乘法原理，得到最终的涂色方法有 $4\times3\times2\times2\times2=96$ 种.故选 E.

【模拟训练】如图所示，用 4 种不同的颜色给矩形 A，B，C，D 涂色，要求相邻的矩形涂不同的颜色，则不同的涂色方法共有____种.【E】



A. 12

B. 16

C. 24

D. 48

E. 72

【解析】

先涂 A，有 4 种方法；

B 与 A 不同，故 B 有 3 种方法；

C 与 A，B 都不同，故 C 有 2 种方法；

D 与 C 不同，故 D 有 3 种方法.

由乘法原理，共有 $4\times3\times2\times3=72$ 种方法.

故选 E.

【真题题型 2】排列组合的基本问题

（一）命题特点

考查排列数与组合数的含义以及组合数的应用.通常会与基本计数原理结合考查.

（二）解题思路

将题目拆解为“选取”或“排序”的过程，然后再对应写表达式.

【真题重现 1】（2012）某商店经营 15 种商品，每次在橱窗内陈列 5 种，若每两次陈列的商品不完全相同，则最多可陈列【B】

A. 3 000 次

B. 3 003 次

C. 4 000 次

D. 4 003 次

E. 4 300 次

【解析】

根据题意，每两次陈列的商品不完全相同，即每次陈列商品的方法均不相同.

15 种商品，选出 5 种陈列：$C_{15}^{5}=\dfrac{15\times14\times13\times12\times11}{5\times4\times3\times2\times1}=3\ 003$. 即多可陈列 3 003 次. 故选

B.

【真题重现 2】（2021）甲、乙两组同学中，甲组有 3 名男同学、3 名女同学；乙组有 4 名男同学、2 名女同学. 从甲、乙两组中各选出 2 名同学，这 4 人中恰有 1 名女同学的选法有种.【D】

A. 26

B. 54

C. 70

D. 78

E. 105

【解析】根据题意可知，4 人中恰有 1 名女同学分为两种情况：

①该名女同学来自甲组（甲组选 1 男 1 女，乙组选 2 男）：$C_3^1C_3^1C_4^2=54$.

②该名女同学来自乙组（甲组选 2 男，乙组选 1 男 1 女）：$C_3^2C_4^1C_2^1=24$.

因此这 4 人中恰有 1 名女同学的选取方法共有 54＋24＝78 种.

故选 D.

【模拟训练】某次专业技能大赛由来自 A 科室的 4 名职工和来自 B 科室的 2 名职工参加. 结果有 3 人获奖且每人的成绩均不相同. 如果获奖者中最多只有 1 人来自 B 科室，则获奖者的名单和名次顺序有____种不同的情况.【D】

A. 48

B. 72

C. 84

D. 96

E. 120

【解析】

获奖者中最多只有 1 人来自 B 科室，有两种情况：

①B 科室有 1 人获奖：先在 B 科室的 2 人中选 1 人，有 $C_2^1=2$ 种；再在 A 科室的 4 人中选 2 人，有 $C_4^2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$ 种；最后将获奖的 3 人排序有 3！＝6（种）. 根据乘法原理，共有 2×6×6＝72.

②B 科室没有人获奖：先在 A 科室 4 人中选 3 人，再按成绩排序，则有 $C_4^3\times3!=24$ 种.

所以根据加法原则，共有 72＋24＝96 种不同的情况.

故选 D.

【真题题型 3】捆绑与插空

（一）命题特点

题中要求若干元素相邻或不相邻.

（二）解题思路

相邻问题采用捆绑法，即将相邻的几个元素“捆绑”成一个大元素，并对这个大元素内部进行排序，再将这个大元素与其他元素进行排列.

不相邻问题采用插空法，先把无位置要求的元素进行全排列（此时用排列数），再将不相邻元素插到无位置要求的元素产生的空位和两端上（此时用组合数）.

【注】相邻与不相邻同时出现时，先考虑相邻元素，即先捆绑，最后考虑不相邻元素插空.

【真题重现】（2023）由于疫情防控，电影院要求不同家庭之间至少间隔 1 个座位，同一家庭的成员座位要相连，两个家庭去看电影，一家 3 人，一家 2 人，现有一排 7 个相连的座位，则符合要求的坐法有【C】

A. 36 种

B. 48 种

C. 72 种

D. 144 种

E. 216 种

【解析】

相邻问题用捆绑法，不相邻问题用插空法.

根据题意，得：两家共 5 个人，会占用 5 个座位，则剩下 2 个座位形成 3 个空，再将这两家人各自捆绑好，然后再进行插空，则符合要求的坐法有$A_3^3A_2^2A_3^2=72$ 种.

故选 C.

【模拟训练】甲、乙、丙、丁、戊五个人去看电影，电影院一排有 7 个座位，甲和乙相邻且丙和丁相邻的不同坐法有____种.【C】

A. 120 种

B. 180 种

C. 240 种

D. 360 种

E. 720 种

【解析】

甲和乙捆绑，丙和丁捆绑，即$A_2^2A_2^2$；

捆绑后看作整体，现在相当于把 3 个人放到 5 个位置，即A_5^3.

故一共有$A_2^2A_2^2A_5^3=240$种不同的做法.

故选 C.

【真题题型 4】定序问题

（一）解题思路

当不同元素排列，局部元素顺序确定（即只有一种顺序）时，用全体有序的情况除以局部有序的情况，即除以定序数量的阶乘，以消除排序.如有 5 人排序，其中 3 人定序，则有$\frac{A_5^5}{A_3^3}$种排列情况.

【真题重现】（2023）快递员收到 3 个同城快递任务，取送地点各不相同，取送件可穿插进行，不同的送件方式有【D】

A. 6 种

B. 27 种

C. 36 种

D. 90 种

E. 360 种

【解析】

方法一：

根据题意，得：取三件快递的动作可分别对应记为A_1、A_2、A_3，送快递的动作可分别记为B_1，B_2，B_3.

取快递和送快递的动作可穿插随意进行，因此全排列共有A_6^6种情况.

但由于同一件物品只能是先取才能送，所以A_1必须在B_1的前面，同理A_2必须在B_2的前面，A_3必须在B_3的前面，则进行消除这三组的顺序，即不同的送件方式有$\frac{A_6^6}{A_2^2A_2^2A_2^2}=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1\times2\times1}=90$种.

方法二：

根据题意，得：取送快递共有六个步骤，三个取，三个送.若需要送完一份快递，按先取后送的顺序完成（“一取一送”顺序固定）.即不同的送件方式有$C_6^2C_4^2C_2^2=90$种.

故选 D.

【模拟训练】某次数学获奖的 6 名高矮互不相同的同学站成两排照相，每排 3 人，后排每个人都高于站在他前面的同学，则共有____种站法.【B】

A. 15 种

B. 90 种

C. 120 种

D. 360 种

E. 720 种

【解析】

6 人任意排列，共有A_6^6种站法.

由于较矮的同学站在前排，较高的同学站在后排，故每列顺序固定，故需要对这 3 列的顺序进行消序，因此共有$\frac{A_6^6}{A_2^2A_2^2A_2^2}=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1\times2\times1}=90$ 种站法.

故选 B.

【真题题型 5】分组与分配问题

（一）命题特点

将若干个不同的元素分成几组，每组至少有 1 个元素.

（二）解题思路

1.分组问题

第一步：按照所给每堆的数量要求进行分组，按照所要求的每组数量逐步进行选取

第二步：若出现 n 个相同数量的分组，则要除以A_n^n以消除排序. 相同的组无需消序.

【真题重现】（2017）将 6 人分成 3 组，每组 2 人，则不同的分组方式共有【B】

A. 12 种

B. 15 种

C. 30 种

D. 45 种

E. 90 种

【解析】$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=\frac{90}{6}=15$ 种.

故选 B.

【模拟训练 1】将 6 本不同的书分成 3 堆，一堆 4 本，另外两堆每堆 1 本，则共有____种分法.【A】

A. 15

B. 20

C. 30

D. 60

E. 90

【解析】

分三步取书，共有$C_6^4C_2^1C_1^1$种方法.

有两堆数量相同，要除以A_2^2，故共有$\frac{C_6^4C_2^1C_1^1}{A_2^2}=15$种.

故选 A.

【模拟训练 2】9 个人平均分成三组，每组 3 个人，甲乙在同一组，则共有____种不同的分法.【B】

A. 80

B. 70

C. 5

D. 60

E. 50

【解析】

先把甲乙放在一组，由于一个组要有 3 个人，则再从剩下的 7 个人中选一个人给甲乙组，有C_7^1种.

再将剩下 6 人等分为两组，有$C_6^3C_3^3$种. 由于剩下的这两组没有区别，所以共有$\frac{C_7^1C_6^3C_3^3}{A_2^2}=70$种不同的分法. 故选 B.

2. 分配问题

当出现不同的归属对象时，转化为分配问题.

分配问题包括两个过程：先分组，再分配，也就是先按照数量分好堆，再排序.

【真题重现】（2018）将 6 张不同的卡片 2 张一组分别装入甲、乙、丙 3 个袋中，若指定的 2 张卡片要在同一组，则不同的装法有【B】

A. 12 种

B. 18 种

C. 24 种

D. 30 种

E. 36 种

【解析】

第一步分组：由于指定的两张卡片在同一组，剩余 4 张等分为两组，这两组的小组卡片数

相同且性质无区别，需要进行消序，即共有$\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}$种装法.

第二步分配：将三组卡片分别作为三个元素分配到甲、乙、丙 3 个袋中，则共有$\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}\cdot A_3^3$ =18 种不同的装法.

故选 B.

【模拟训练】8 人入住甲、乙、丙三个不同的房间，每间最多住 3 人，则共有____种不同的住宿方案.【C】

A. 560 种

B. 1120 种

C. 1680 种

D. 2240 种

E. 2800 种

【解析】

分组：将 8 人分成 2,3,3 三组，即有$\frac{C_8^2C_6^3C_3^3}{A_2^2}$ =280 种

分配：将这三组作为三个元素分配到甲、乙、丙三个不同的房间，有$A_3^3=6$种方案.

故共有 280×6=1680 种不同的方案.

故选 C.

【真题题型 6】隔板法

（一）命题特点

将 n 个完全相同的元素全分给 m 个对象，要求每个对象至少分到 1 个元素且这 n 个元素要全分完.

（二）解题思路

由于要分配的元素相同，每个对象仅以分到的数量来进行区分，所以可以通过隔板调整分配的数量，隔板有几种放法就表示有几种分法.

将 n 个相同元素摆成一排，之间有 n－1 个空位，插入 m－1 块隔板就可将这 n 个相同元素分成 m 组，相当于在 n－1 个空位中选 m－1 个，故一共有C_{n-1}^{m-1}种分法.

【真题重现】（2024）已知m，n，k都是正整数，若$m+n+k=10$，则m，n，k的取值方法有____.【C】

A. 21 种

B. 28 种

C. 36 种

D. 45 种

E. 55 种

【解析】

本题采用隔板法，将 10 个球排成一排，球与球之间形成 9 个空隙，将两个隔板插入这些空隙中(每空至多插一块隔板)，规定由隔板分成的左、中、右三部分的球数分别为 m，n，k 之值,则隔法与解的个数之间建立了一一对立关系. 共有 9 个空隙，两个隔板，将两个隔板放入 9 个空隙中，即从 9 个空隙中随机抽取出两个空隙作为一个组合，则总组合数为 C_9^2，故解的个数为 $C_{n-1}^{m-1}=C_{10-1}^{3-1}=C_9^2=36$ 个.

故选 C.

【模拟训练】满足 $x_1+x_2+x_3+x_4=12$ 的正整数解的组数有【B】

A. 160 种

B. 165 种

C. 175 种

D. 184 种

E. 190 种

【解析】

将 12 个完全相同的球排成一列，在它们之间形成的 11 个空隙中任选 3 个插入 3 块隔板，从而把球分成 4 个组.

由于在这 12 个球之间插入隔板的方式共有 $C_{11}^3=165$ 种，故方程的解和插板的方法一一对应，即方程的解的组数等于插隔板的方法数 $C_{11}^3=165$ 种. 故选 B.

第二节 古典概型

知识点讲解

古典概型的概率：$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$. 其中，$n(A)$ 和 $n(\Omega)$ 分别表示事件 A 和样本空间 Ω 包含的样本点个数.

题型考法

【真题题型 1】穷举法

（一）解题思路

当遇到对元素的约束条件无法采用组合直接选取时，此时需要按照所给的约束条件进行列举.

在列举时，需要明确好参照标准，否则容易出现多列举或者少列举的错误.

【真题重现 1】（2024）将 3 张写有不同数字的卡片随机地排成一排，数字面朝下. 翻开左边和中间的 2 张卡片，如果中间卡片上的数字大，那么取中间的卡片，否则取右边的卡片. 则取出的卡片上的数字的为最大的概率为____. 【C】

A. $\frac{5}{6}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{3}$

E. $\frac{1}{4}$

【解析】

将 3 张写有不同数字的卡片按顺序随机地排成一排，则共有 $A_3^3=6$ 种情况，因为事件总数不多，故可列举出所有事件进行分析.

设这 3 张写有不同数字的卡片分别为 1,2,3. 则这三张卡片的所有排列方式分别为：

①：1,2,3. 此时中间卡片数字比左边卡片数字大，取中间的卡片，即取 2，取出的卡片上的数字不是 3 张卡片中最大的.

②：1,3,2. 此时中间卡片数字比左边卡片数字大，取中间的卡片，即取 3，取出的卡片上的数字是 3 张卡片中最大的.

③：2,3,1.此时中间卡片数字比左边卡片数字大，取中间的卡片，即取3，取出的卡片上的数字是3张卡片中最大的.

④：2,1,3.此时中间卡片数字比左边卡片数字小，取右边的卡片，即取3，取出的卡片上的数字是3张卡片中最大的.

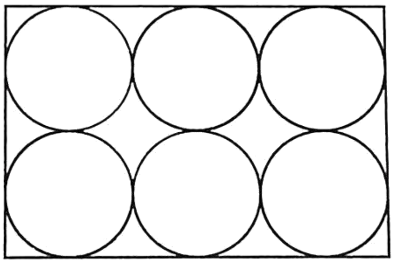
⑤：3,1,2.此时中间卡片数字比左边卡片数字小，取右边的卡片，即取2，取出的卡片上的数字不是3张卡片中最大的.

⑥：3,2,1.此时中间卡片数字比左边卡片数字小，取右边的卡片，即取1，取出的卡片上的数字不是3张卡片中最大的.

综上，在所有的6种情况中，共有3种情况取出的卡片的数字是3张卡片中最大的.所以，取出的卡片上的数字的最大的概率为$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

故选C.

【真题重现2】（2022）如图所示，已知相邻的圆都相切，从这6个圆中随机取2个，则这2个圆不相切的概率为【A】



A. $\frac{8}{15}$

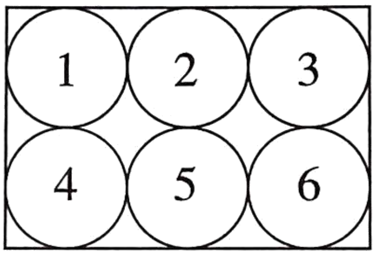
B. $\frac{7}{15}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{2}{5}$

E. $\frac{2}{3}$

【解析】



根据题意，可将六个圆按照顺序标上序号，如图所示.

则基本事件数为$C_6^2=15$，不相邻的情况有（1，3），（1，5），（1，6），（2，4），（2，6），（3，4），（3，5），（4，6）共8种，所以不相邻的概率为$P=\frac{8}{C_6^2}=\frac{8}{15}$.

故选A.

【模拟训练1】从左至右依次站着甲、乙、丙3个人，从中随机抽取2个人进行位置调换，则经过两次这样的调换后，甲在乙左边的概率是【B】

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{3}{4}$

E. $\frac{1}{5}$

【解析】

从左至右依次站着甲、乙、丙3个人，从中随机抽取2个人进行位置调换，则经过两次这样的调换，基本事件总数为$n=C_3^2C_3^2=9$.

从左至右依次站着甲、乙、丙3个人，即初始站位为：（甲乙丙）.

从中随机抽取2个人进行位置调换，则第一次调换后，对调后的位置有三种：

（1）对调乙和丙的位置：（甲丙乙）；

（2）对调甲和乙的位置：（乙甲丙）；

（3）对调甲和丙的位置：（丙乙甲）.

第二次调换的所有可能为：

（1）第一次调换后的位置为（甲丙乙）时，经过第二次调换，可能的位置有3种：

①对调甲和丙的位置：（丙甲乙）；

②对调甲和乙的位置：（乙丙甲）；

③对调丙和乙的位置：（甲乙丙）.

此时①，③符合甲在乙左边的条件.

（2）第一次调换后的位置为（乙甲丙）时：

①对调乙和甲的位置：（甲乙丙）；

②对调乙和丙的位置：（丙甲乙）；

③对调甲和丙的位置：（乙丙甲）.

此时①，②符合甲在乙左边的条件.

（3）第一次调换后的位置为（丙乙甲）时：

①对调乙和丙的位置：（乙丙甲）；

②对调丙和甲的位置：（甲乙丙）；

③对调乙和甲的位置：（丙甲乙）.

此时②，③符合甲在乙左边的条件.

所以经过两次这样的调换后，甲在乙左边包含的基本事件个数 $m=6$.

故经过两次这样的调换后，甲在乙左边的概率：$P=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

故选 B.

【模拟训练 2】“微信抢红包”自 2015 年以来异常火爆，在某个微信群某次进行的抢红包活动中，若所发红包的总金额为 8 元，被随机分配为 1.72 元，1.83 元，2.28 元，1.55 元，0.62 元，共 5 份供甲、乙等 5 人抢，每人只能抢一次，则甲、乙二人抢到的红包金额之和不低于 3 元的概率是【C】

A. $\frac{3}{10}$

B. $\frac{1}{10}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{2}{5}$

E. $\frac{1}{2}$

【解析】

甲、乙二人抢到的金额之和包含的基本事件的总数 $n=C_5^2=10$，甲、乙二人抢到的金额之和不低于 3 元包含基本事件有 6 个，由此能求出甲、乙二人抢到的金额之和不低于 3 元的概率.

由题意，所发红包的总金额为 8 元，被随机分配为 1.72 元、1.83 元、2.28 元、1.55 元、0.62 元，5 份，供甲、乙等 5 人抢，每人只能抢一次，甲乙二人抢到的金额之和包含的基本事件的总数为 $n=C_5^2=10$，甲乙二人抢到的金额之和不低于 3 元包含的基本事件有 6 个，分别（1.72，1.83），（1.72，2.28），（1.72，1.55），（1.83，2.28），（1.83，1.55），（2.28，1.55），所以甲乙二人抢到的金额之和不低于 3 元的概率为 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

故选 C.

【真题题型 2】取样模型

（一）命题特点

常考题型有两种：

1.根据不同取样方式计算取出某种元素的概率.

取样方式 $\begin{cases} \text{逐次取样} \begin{cases} \text{有放回取样:样本不变} \\ \text{无放回取样:样本逐一减少} \end{cases} \\ \text{一次取样：所取元素不考虑顺序} \end{cases}$

2.以条件充分性判断形式考查，判断各元素的数量是否能满足概率在某个取值范围内.

（二）解题思路

根据不同取样方式的特点，结合古典概型公式进行计算.需要特别注意取样时对于顺序有无要求.

【真题重现 1】（2024）有 4 种不同的颜色，甲乙两人各随机选 2 种，则两人颜色完全相同的概率为____.【A】

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{9}$

C. $\frac{1}{12}$

D. $\frac{1}{16}$

E. $\frac{1}{36}$

【解析】

甲、乙分别随机从 4 种颜色中选两种颜色，无顺序要求，共需两个步骤.

第一步，甲选择颜色，从 4 种颜色中选两种颜色，共有 $C_4^2=\frac{4!}{2!(4-2)!}=6$ 种选法；

第二步，乙选择颜色，从 4 种颜色中选两种颜色，共有 $C_4^2=\frac{4!}{2!(4-2)!}=6$ 种选法.

根据乘法原理，甲、乙分别随机从 4 种颜色中选两种颜色共有 $C_4^2\times C_4^2=6\times 6=36$ 种选法，此为事件的所有可能数.

若甲、乙两人所选的两种颜色完全相同，即从 4 种颜色中选两种颜色，则两人颜色相同时共有 $C_4^2=6$ 种相同的可能，此为所求事件数.

所以两人颜色完全相同的概率为 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

【真题重现 2】（2021）某商场利用抽奖方式促销，100 个奖券中设有 3 个一等奖、7 个二等奖，则一等奖先于二等奖抽完的概率为【D】

A. 0. 3

B. 0. 5

C. 0. 6

D. 0. 7

E. 0. 73

【解析】

根据题意得，100 个奖券中有奖的奖券一共有 10 张（3 张一等奖和 7 张二等奖），其它奖券不影响本题的结果. 因此 10 张奖券的基本事件总数为A_{10}^{10}.

一等奖先于二等奖抽完，有顺序要求. 实际就是指最后一次一定要抽中的是二等奖，即 7 张二等奖选一张出来放在最后一次抽，其余的 9 张奖券全排列$C_7^1A_9^9$.

故一等奖先于二等奖抽完的概率为$\dfrac{C_7^1A_9^9}{A_{10}^{10}}=\dfrac{7\times 9!}{10!}=\dfrac{7}{10}$. 故选 D.

【真题重现 3】（2024）袋子中有红白黑三种颜色的球若干，随机取 1 球，则该球为白球的概率大于$\dfrac{1}{4}$. 【C】

（1）红球数量最少；

（2）黑球数量不到一半.

【解析】

设红球x个，黑球y个，白球z个，

则随机取 1 球为白球的概率不小于$\dfrac{1}{4}$等价于$\dfrac{z}{x+y+z}\geq\dfrac{1}{4}$，即$x+y\leq 3z$.

条件(1)红球数量最少，即$x\leq y$且$x\leq z$，无法推出$x+y\leq 3z$，故条件（1）不充分；

条件(2)黑球数量不到一半，即$\dfrac{y}{x+y+z}<\dfrac{1}{2}$，化简得$y<x+z$，即$x+y<2x+z$，无法推出$x+y<3z$，故条件（2）不充分.

两条件联合$\begin{cases}x\leq y\\x\leq z\\x+y<2x+z\end{cases}$，因为$x\leq z$，所以$2x\leq 2z$，所以$x+y<2x+z\leq 2z+z=3z$，所以条件（1）、（2）联合起来充分.

故选 C.

【模拟训练 1】从口袋中摸出的 2 个球都是黑球的概率是$\frac{1}{2}$.【B】

（1）口袋中装有大小相同、编号不同的 2 个白球和 3 个黑球.

（2）口袋中装有大小相同、编号不同的 1 个白球和 3 个黑球.

【解析】

条件（1），$P=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$. 故条件（1）不充分.

条件（2），$P=\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{2}$. 故条件（2）充分.

综上，故选 B.

【模拟训练 2】在一只不透明的口袋中放入只有颜色不同的白球 6 个，黑球 8 个，黄球 n 个. 则黄球的个数 n 是 4.【D】

（1）搅匀后随机从中摸取一个恰好是白球的概率为$\frac{1}{3}$.

（2）搅匀后随机从中摸取一个恰好是黑球的概率为$\frac{4}{9}$.

【解析】

∵口袋中装有白球 6 个，黑球 8 个，黄球 n 个.

∴球的总个数为 $6+8+n$.

条件（1），从中随机摸出一个球，摸到白球的概率为$\frac{1}{3}$. 则$\frac{6}{6+8+n}=\frac{1}{3}\Rightarrow n=4$. 故条件（1）充分.

条件（2），从中随机摸出一个球，摸到黑球的概率为$\frac{4}{9}$. 则$\frac{8}{6+8+n}=\frac{4}{9}\Rightarrow n=4$. 故条件（2）充分.

综上，故选 D.

【真题题型 3】数字古典概型

（一）命题特点

数字古典概型与普通古典概型类似，只是题目中给的是数字，需要从给出的多个数字中任意选出若干个，且对选出的数字有要求.常见的对数字的要求是：奇数、偶数、质数、整除、加减、大小比较等.

（二）解题思路

与一般的古典概型解题思路一样，分别解出满足条件的事件数与事件总数，再相除.

【真题重现 1】（2020）从 1 至 10 这 10 个整数中任取 3 个数，恰有 1 个质数的概率是【B】

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{5}{12}$

D. $\frac{2}{5}$

E. $\frac{1}{120}$

【解析】本题考查古典概型.

10 以内的质数有：2，3，5，7. 故 10 以内的质数有 4 个，非质数有 6 个.

从 10 个整数中任取 3 个数的取法有C_{10}^3=120（种）. 任取的 3 个数中恰有 1 个质数的取法有$C_4^1C_6^2$=60（种）. 则符合题意所求的概率是$\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$. 故选 B.

【真题重现 2】（2016）在分别标记了数字 1，2，3，4，5，6 的 6 张卡片中随机抽取 3 张，其上数字之和等于 10 的概率是【C】

A. 0.05

B. 0.1

C. 0.15

D. 0.2

E. 0.25

【解析】

从数字不同的 6 张卡片随机抽取 3 张的总事件个数共有$C_6^3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$ 个.

3 张卡片上的数字之和等于 10 的情况有：（1，3，6），（1，4，5），（2，3，5）. 即目标事件个数为 3 个. 因而，3 张卡片上的数字之和等于 10 的概率是 $P=\frac{3}{C_6^3}=\frac{3}{20}=0.15$.

故选 C.

【真题重现 3】（2018）从标号为 1 到 10 的 10 张卡片中随机抽取 2 张，它们的标号之和能被 5 整除的概率为【A】

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{1}{9}$

C. $\frac{2}{9}$

D. $\frac{2}{15}$

E. $\frac{7}{45}$

【解析】

根据题意，从 10 张卡片中抽取 2 张的总事件个数为$C_{10}^{2}=45$.

10 张卡片中随机抽取 2 张可以被 5 整除的组合有（1，4），（1，9），（2，3），（2，8），（3，7），（4，6），（5，10），（6，9），（7，8）共 9 个目标事件.

因此，所求事件的概率为$\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$. 故选 A.

【真题重现 4】（2017）甲从 1，2，3 中抽取一个数，记为a；乙从 1，2，3，4 中抽取一个数，记为b. 规定当$a>b$或者$a+1<b$时甲获胜，则甲获胜的概率为【E】

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{5}{12}$

E. $\frac{1}{2}$

【解析】

根据题意得，甲、乙各取一数总共有$C_{3}^{1}C_{4}^{1}=3\times4=12$ 种取法，即总的基本事件数为 12.

第一类：当$a>b$时甲获胜. 当$a=2$ 时，$b=1$；当$a=3$ 时，$b=1$ 或$b=2$，共 3 种情况.

第二类：当$a+1<b$时甲获胜. 当$a=1$ 时，$b=3$ 或$b=4$；当$a=2$ 时，$b=4$，共 3 种情况.

因此，所求事件包含的基本事件数为 $3+3=6$，即甲获胜的概率为$P=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$. 故选 E.

【模拟训练 1】有编号互不相同的五个砝码，其中 5 克、3 克、1 克砝码各一个，2 克砝码两个，从中随机选取三个，则这三个砝码的总质量为 9 克的概率是【B】

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{3}$

E. $\frac{1}{2}$

【解析】

编号互不相同的五个砝码，其中 5 克、3 克、1 克砝码各一个，2 克砝码两个，从中随机选取三个的基本事件总数 $n=C_5^3=10$.

这三个砝码的总质量为 9 的基本事件个数 m：（5，3，1），（5，2，2）共 2 个.

所以这三个砝码的总质量为 9 克的概率 $P=\frac{m}{n}=\frac{1}{5}$.

故选 B.

【模拟训练 2】将一颗质地均匀的正方体骰子先后抛掷 2 次，观察向上的点数，则点数和为 5 的概率是【D】

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{7}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{1}{9}$

E. $\frac{1}{10}$

【解析】

将一颗骰子先后抛掷 2 次，观察向上的点数的基本事件总数 $n=6\times6=36$.

其中 2 次点数之和为 5 包含的基本事件个数 m：（1，4），（4，1），（2，3），（3，2）共 4 个.

所以 2 次点数之和为 5 的概率是 $P=\frac{m}{n}=\frac{1}{9}$.

故选 D.

【真题题型 4】正难则反

（一）命题特点

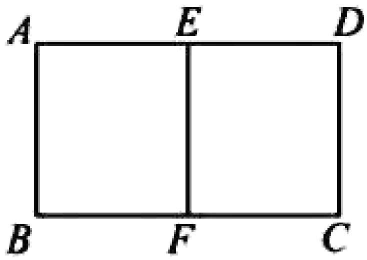
正面入手情况复杂，或题目中出现“至少”“至多”“或、且”“不完全相同”“完全不同”之类的词.

（二）解题思路

考虑从反面入手，将其等价转化为一个较简单的问题来处理. 即正面事件发生的概率等于 1 减去反面事件发生的概率.

【真题重现 1】（2023）如图所示，在矩形 $ABCD$ 中，$AD=2AB$，E，F 分别为 AD，BC

的中点，从A、B、C、D、E、F中任意取 3 个点，则这 3 个点为顶点可以组成直角三角形的概率为【E】



A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{11}{20}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{13}{20}$

E. $\frac{7}{10}$

【解析】

根据题意，正面考虑的情况太多，我们可以从反面分析.

从A、B、C、D、E、F六个点中任意取 3 个点，总的情况有$C_6^3=20$种.反面情况是这 3 个点无法组成直角三角形，可分两种情况：

①3 点共线，有：(A，E，D)、(B，F，C).（2 个）

②钝角三角形，有：$\triangle AEC$、$\triangle DEB$、$\triangle BFD$、$\triangle CFA$.（4 个）

综上，则这 3 个点为顶点可以组成直角三角形的概率为$1-\frac{6}{20}=\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$.

故选 E.

【真题重现 2】（2021）从装有 1 个红球、2 个白球、3 个黑球的袋中随机取出 3 个球，则这 3 个球的颜色至多有两种的概率为【E】

A. 0.3

B. 0.4

C. 0.5

D. 0.6

E. 0.7

【解析】

从 6 个球中随机取出 3 个球的基本事件总数为C_6^3.

由于正面“3 个球的颜色至多有两种”的情况很多，所以可以采取反面考虑，反面是“3

个球的颜色为三种不同的颜色”.

“3 个球的颜色为三种不同的颜色”的基本事件个数为$C_1^1C_2^1C_3^1$.

故这 3 个球的颜色至多有两种的概率 $P=1-\frac{C_1^1C_2^1C_3^1}{C_6^3}=1-\frac{1\times2\times3}{\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}}=\frac{7}{10}$.

故选 E.

【真题重现 3】（2012）经统计，某机场的一个安检口每天中午办理安检手续的乘客人数及相应的概率如下表：

乘客数	0～5	6～10	11～15	16～20	21～25	25 以上
概率	0. 1	0. 2	0. 2	0. 25	0. 2	0. 05

该安检口 2 天中至少有 1 天中午办理安检手续的乘客人数超过 15 的概率是【E】

A. 0. 2

B. 0. 25

C. 0. 4

D. 0. 5

E. 0. 75

【解析】

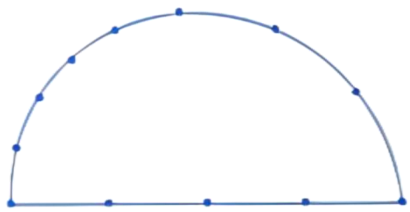
反面是“2 天中午办理安检手续的乘客人数都没有超过 15”.

2 天中午办理安检手续的乘客人数都没有超过 15 的概率是$(0.1+0.2+0.2)^2=0.25$.

则该安检口 2 天中至少有 1 天中午办理安检手续的乘客人数超过 15 的概率是 $1-0.25=0.75$.

故选 E.

【模拟训练 1】在一个半圆周上共有 12 个点，如图，从中任取 3 个点，可以画出三角形的概率是【E】



A. $\frac{17}{22}$

B. $\frac{18}{22}$

C. $\frac{19}{22}$

D. $\frac{20}{22}$

E. $\frac{21}{22}$

【解析】

根据题意，正面考虑的情况太多，我们可以从反面分析.

当选取的 3 个点都是圆的直径上的点时，这 3 点共线，无法组成三角形，又因为圆的直径上共有 5 个点，所以无法构成三角形的情况有$C_5^3=10$种.

从 12 个点中任取 3 个点的基本事件总数为$C_{12}^3=220$种.

所以无法组成三角形的概率是 $P=1-\frac{C_5^3}{C_{12}^3}=1-\frac{10}{220}=\frac{210}{220}=\frac{21}{22}$.

故选 E.

【模拟训练 2】在 5 张电话卡中，有 3 张移动卡和 2 张联通卡，从中任取 2 张，求至多有一张移动卡的概率【A】

A. $\frac{7}{10}$

B. $\frac{6}{10}$

C. $\frac{5}{10}$

D. $\frac{4}{10}$

E. $\frac{3}{10}$

【解析】

在 5 张电话卡中任取 2 张的基本事件总数为$C_5^2=10$种.

由于：“至多有一张移动卡”的情况很多，可采取反面考虑.“至多有一张移动卡”的反面是“2 张全是移动卡”.

“2 张全是移动卡”的基本事件个数为$C_3^2=3$种.

所以“至多有一张移动卡”的概率为：$P=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$.

故选 A.

【模拟训练 3】若一个袋中有 5 个红球和 3 个蓝球，从中任取两个球，其中至少有一个红球的概率为【C】

A. $\frac{3}{28}$

B. $\frac{13}{28}$

C. $\frac{25}{28}$

D. $\frac{2}{7}$

E. $\frac{5}{7}$

【解析】

一个袋中装有 5 个红球和 3 个蓝球，从中任取两个球的基本事件总数 $n=C_8^2=28$.

“至少有一个红球”的对立事件是“取到 2 个蓝球”.

取到 2 个蓝球包含的基本事件个数 $m=C_3^2=3$.

所以至少有一个红球的概率 $P=1-\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{25}{28}$.

故选 C.

第三节 独立事件

知识点讲解

（一）独立事件

一般地，当$P(AB)=P(A)P(B)$时，就称事件 A 与事件 B 相互独立（简称独立）. 事件 A 与 B 相互独立的直观理解是，事件 A 是否发生不会影响事件 B 发生的概率，事件 B 是否发生也不影响事件 A 发生的概率.

（二）伯努利概型

1. 定义：若一个随机试验E具备以下特征：

（1）各次试验相互独立，即某一次的试验结果对其他次均无影响.

（2）试验在相同条件下重复进行n次.

（3）每次试验结果仅有两个，即A和$\overline{A}$.

则称该试验为**伯努利概型**.

2. 相关公式

（1）在n重伯努利试验中，设每次试验中事件A发生的概率为p（$0<p<1$），事件A发生的次数为X，则**事件A恰好发生k次的概率为：**$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$（$k=0,1,\cdots,n$）.

（2）在n重伯努利试验中，设每次试验中事件A发生的概率为p（$0<p<1$），事件A发生的次数为X，则**事件A在第k次试验中首次发生的概率为：**$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$（$k=1,2,\cdots$）.

（3）有N个元素，N_1个属于第一类，N_2个属于第二类（$N_1+N_2=N$）. 从这N个元素中**不放回**地取出n个元素，用X表示取出的n个元素中有k个属于第一类元素的个数，则**取出的n个元素中有k个属于第一类元素的概率为：**$P\left(X=k\right)=\dfrac{C_{N_1}^k C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}$.

题型考法

【真题题型 1】两个独立事件模板

（一）解题思路

甲乙成功的概率分别为p_1和p_2，则

（1）甲乙都成功的概率为 $p_1 \cdot p_2$；

（2）甲乙都不成功的概率为 $(1\text{-}p_1)\cdot(1-p_2)$；

（3）甲乙至少有一个成功的概率为 $1\text{-}(1\text{-}p_1)\cdot(1-p_2)$；

（4）甲乙恰有一个成功的概率为 $p_1\cdot(1\text{-}p_2)+(1\text{-}p_1)\cdot p_2$.

【真题重现 1】（2012）某产品由两道独立工序加工完成，则该产品是合格品的概率大于 0.8.【B】

（1）每道工序的合格率为 0.81.

（2）每道工序的合格率为 0.9.

【解析】

条件(1),每道工序的合格率为 0.81,则该产品是合格品的概率为 $P=0.81\times0.81=0.6561<0.8$.故条件（1）不充分.

条件（2），每道工序的合格率为 0.9，则该产品是合格品的概率为 $P=0.9\times0.9=0.81>0.8$.故条件（2）充分.

综上，故选 B.

【真题重现 2】（2019）有甲、乙两袋奖券，获奖率分别为 p 和 q.某人从两袋中各随机抽取 1 张奖券，则此人获奖的概率不小于 $\frac{3}{4}$.【D】

（1）已知 $p+q=1$.

（2）已知 $pq=\frac{1}{4}$.

【解析】

根据题意得，甲袋获奖概率为 p，乙袋获奖概率为 q，此人不获奖的概率为 $(1-p)(1-q)$，则此人获奖的概率为 P（A）$=1-(1-p)(1-q)=p+q-pq$.

由均值不等式：$(\frac{a+b}{2})^2\geqslant ab\Rightarrow(\frac{p+q}{2})^2\geqslant pq$，即 $(p+q)^2\geqslant4pq$.

条件(1)，已知 $p+q=1$ 且 $0<p<1$，$0<q<1$，由均值不等式得 $(p+q)^2\geqslant4pq\Rightarrow pq\leqslant\frac{1}{4}$.

则 P（A）$=p+q-pq\geqslant\frac{3}{4}$.故条件（1）充分.

条件（2），已知 $pq=\frac{1}{4}$ 且 $0<p<1$，$0<q<1$，由均值不等式得 $(p+q)^2\geqslant4pq\Rightarrow p+q\geqslant 1$.

则 P（A）$=p+q-pq\geqslant\frac{3}{4}$.故条件（2）充分.

综上，故选 D.

【模拟训练 1】甲、乙两人参加投篮游戏，已知甲、乙两人投中的概率分别为 0.6 和 0.75，

则甲、乙两人各投篮 1 次，恰有 1 个人投中的概率是【B】

A. 0.4

B. 0.45

C. 0.5

D. 0.55

E. 0.65

【解析】“恰有 1 个人投中”分为“甲投中乙未投中”、“乙投中甲未投中”两种情况，故 $P=0.6\times0.25+0.4\times0.75=0.45$.

故选 B.

【模拟训练 2】某部门组织甲、乙两人破译一个密码，每人能否破译该密码相互独立．已知甲、乙各自独立破译出该密码的概率分别为$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$，则求他们破译出该密码的概率是【C】

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{3}{5}$

E. $\frac{2}{3}$

【解析】

根据题意得，甲破译出密码的概率为 $p=\frac{1}{3}$，乙破译出密码的概率为 $q=\frac{1}{4}$，则甲乙都破译不出密码的概率为 $(1-p)(1-q)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$，则能破译出密码的概率为 P（A）$=1-(1-p)(1-q)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

故选 C.

【真题题型 2】多个独立事件模板

（一）解题思路

（1）如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，那么这 n 个事件同时发生的概率为 $P(A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\cdots\cdot P(A_n)$.

（2）如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，那么这 n 个事件都不发生的概率为 $P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \cdots \cdot \overline{A_n}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \cdots \cdot P(\overline{A_n})$.

（3）如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，那么这 n 个事件至少有一个发生的概率为 $P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \cdots \cdot P(\overline{A_n})$.

【真题重现 1】（2017）某试卷由 15 道选择题组成，每道题有 4 个选项，只有一项是符合试题要求的. 甲有 6 道题能确定正确选项，有 5 道题能排除 2 个错误选项，有 4 道题能排除 1 个错误选项. 若从每题排除后剩余的选项中选 1 个作为答案，则甲得满分的概率为【B】

A. $\frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{3^5}$

B. $\frac{1}{2^5} \cdot \frac{1}{3^4}$

C. $\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^4}$

D. $\frac{1}{2^4} \cdot (\frac{3}{4})^5$

E. $\frac{1}{2^4} + (\frac{3}{4})^5$

【解析】

根据题意可得以下推理：

排除 2 个错误选项就得 2 选 1，则每道题答对的概率为 $\frac{1}{2}$ ⇒共 5 道题，则全部答对的概率为 $(\frac{1}{2})^5$.

排除 1 个错误选项就得 3 选 1，则每道题答对的概率为 $\frac{1}{3}$ ⇒共 4 道题，则全部答对的概率为 $(\frac{1}{3})^4$.

甲得满分的概率＝全部题目都答对的概率＝$(\frac{1}{2})^5 \cdot (\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{2^5} \cdot \frac{1}{3^4}$.

故选 B.

【真题重现 2】（2013）档案馆在一个库房中安装了 n 个烟火感应报警器，每个报警器遇到烟火成功报警的概率均为 p. 该库房遇到烟火发出报警的概率达到 0.999.【D】

（1）$n=3$，$p=0.9$.

（2）$n=2$，$p=0.97$.

【解析】

公式：$p_{（发出报警）} + p_{（不会发出报警）} = 1$

条件(1),$n=3,p=0.9\Rightarrow 3$ 个烟火感应报警器遇到烟火发出报警的概率为$p=1-(1-0.9)^3=1-0.001=0.999$. 故条件（1）充分.

条件（2），$n=2$，$p=0.97\Rightarrow 2$ 个烟火感应报警器遇到烟火发出报警的概率为$p=1-(1-0.97)^2=1-0.0009=0.9991\approx 0.999$. 故条件（2）充分.

综上，故选 D.

【模拟训练 1】某滴滴司机从学校到飞机场途中有七个交通岗，假设司机在各交通岗遇到红灯这一事件是相互独立的，并且概率都是$\frac{1}{3}$，那么这位司机遇到红灯前，已经通过了三个交通岗的概率是【A】

A. $\frac{8}{81}$

B. $\frac{8}{27}$

C. $\frac{4}{81}$

D. $\frac{4}{27}$

E. $\frac{1}{9}$

【解析】

由题意得，在各交通岗遇到红灯这一事件是相互独立的. 因为这位司机在第一、二、三个交通岗未遇到红灯，在第四个交通岗遇到红灯所以 $P=(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3})\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{81}$.

故选 A.

【模拟训练 2】档案馆装了三个烟火感应报警器，遇到烟火，分别发出报警的概率分别为 0.9, 0.8, 0.7，若遇到烟火，则发出报警的概率为【C】

A. 0.996

B. 0.99

C. 0.994

D. 0.96

E. 0.94

【解析】

一共有 3 个烟火感应报警器，这 3 个烟火感应报警器遇到烟火发出报警的概率为$p=1-(1-0.9)(1-0.8)(1-0.7)=1-0.006=0.994$.

故选 C.

【真题题型 3】比赛模板

（一）命题特点

以比赛为命题背景，求某人赢得比赛的概率.

（二）解题思路

先根据题目条件分析出比赛的结果，再用独立事件的相关公式计算对应概率.

【真题重现 1】（2018）甲、乙两人进行围棋比赛，约定先胜 2 盘者赢得比赛.已知每盘棋甲获胜的概率是 0.6，乙获胜的概率是 0.4.若乙在第一盘获胜，则甲赢得比赛的概率为【C】

A. 0.144

B. 0.288

C. 0.36

D. 0.4

E. 0.6

【解析】

根据题意得，乙在第一盘获胜.若甲赢得比赛，甲只能在第二盘和第三盘中都获胜，所以甲赢得比赛的概率为 $0.6\times0.6=0.36$.

故选 C.

【真题重现 2】（2015）某次网球比赛的四强对阵为甲对乙，丙对丁，两场比赛的胜者将争夺冠军.选手之间相互获胜的概率如下：

获胜概率	甲	乙	丙	丁
甲获胜概率		0.3	0.3	0.8
乙获胜概率	0.7		0.6	0.3
丙获胜概率	0.7	0.4		0.5
丁获胜概率	0.2	0.7	0.5	

则甲获得冠军的概率为【A】

A. 0.165

B. 0.245

C. 0.275

D. 0.315

E. 0.330

【解析】

想要甲获得冠军，则第一轮甲对乙必须获胜.根据甲第二轮的对手分两种情况：

第①种情况：

第二轮对手是丙，丙需要先胜丁，甲先胜乙再胜丙，概率为 $0.3\times0.5\times0.3=0.045$.

第②种情况：

第二轮对手是丁，丁胜丙，甲再胜丁，概率为 0.3×0.5×0.8=0.12.

综上，甲获得冠军的概率为 0.045+0.12=0.165. 故选 A.

【模拟训练】甲乙两人进行一场围棋比赛，约定先胜 3 局者获得本次比赛的胜利，比赛结束. 假设在每一局中，甲获胜的概率为 0.6，乙获胜的概率为 0.4，各局比赛结果相互独立，已知在前两局比赛中，甲、乙各胜一局，则甲最终获得本次比赛的胜利的概率为【E】

A. 0.280

B. 0.512

C. 0.528

D. 0.640

E. 0.648

【解析】

前两局甲乙各胜一局，这是已知条件（已经发生的既定事实，不需要再求其概率）. 要让甲胜利，需甲再胜 2 局，乙最多胜一局，所以需要进行分类讨论：

（1）甲胜，甲胜. 0.6×0.6=0.36.

（2）乙胜，甲胜，甲胜. 0.4×0.6×0.6=0.144.

（3）甲胜，乙胜，甲胜. 0.6×0.4×0.6=0.144.

所以 P=0.36+0.144+0.144=0.648.

故选 E.

【真题题型 4】伯努利概型

（一）解题思路

代入公式计算即可.

【真题重现】（2017）某人参加资格考试，有A类和B类选择，A类的合格标准是抽 3 道题至少会做 2 道，B类的合格标准是抽 2 道题需都会做. 则此人参加A类合格的机会大.【C】

（1）此人A类题中有 60%会做.

（2）此人B类题中有 80%会做.

【解析】本题考查伯努利概型.

根据题意，伯努利概型公式得：$P_n(k)=C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$（$n$=0，1，2，…，$n$），其中$q=1-p$.

条件（1），已知A类题会做的概率，但无法确定B类题会做的概率. 无法比较. 故条件（1）不充分.

条件（2），已知B类题会做的概率，但无法确定A类题会做的概率. 无法比较. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合起来，则有：

$P(A)=P_3(2)+P_3(3)=C_3^2(0.6)^2(0.4)^1+C_3^3(0.6)^3(0.4)^0=0.648$.

$P(B)=P_2(2)=C_2^2(0.8)^2(0.2)^0=0.64$.

比较：0.648＞0.64.因而此人参加A类合格的机会大.故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选C.

【模拟训练】小鸿、小廷两人各向同一目标射击两次，每射中一次得1分，则小鸿得分多于小廷得分的概率为0.39.【C】

（1）小鸿的命中率为0.6.

（2）小廷的命中率为0.5.

【解析】

小鸿的得分比小廷多，需要进行多种情况的分类讨论.

小鸿2分，小廷0分；小鸿2分，小廷1分；小鸿1分，小廷0分.

条件（1），只知道小鸿的命中率，不知道小廷的命中率，无法进行计算.故条件（1）不充分.

条件（2），只知道小廷的命中率，不知道小鸿的命中率，无法进行计算.故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）独立都不充分，考虑条件（1）（2）联立.

$P=0.6^2\cdot0.5^2+0.6^2\cdot C_2^1\cdot0.5\cdot0.5+C_2^1\cdot0.6\cdot0.4\cdot0.5^2=0.39$.故条件（1）（2）联立充分.

综上，故选C.

第六章 应用题

第一节 比例问题

知识点讲解

（一）部分量和总量的关系

1. 部分量＝总量×部分量对应比例.

2. $\dfrac{部分量}{总量}=部分量对应比例$.

3. 总量＝$\dfrac{部分量}{对应的比例}$.

（二）增长率问题

1. 概念

基期：作为对比参照的时期，描述基期的具体数值称为基期量.

现期：相对于基期的时期，描述现期的具体数值称为现期量.

增长量：指社会经济现象在一定时期内增长（或减少）的绝对量.

增长率：指现期量与基期量之间进行比较的一种相对指标，是一个百分数.

$$增长量=现期量-基期量=基期量\times增长率=\frac{现期量}{1+增长率}\times增长率$$

$$增长率=\frac{现期量-基期量}{基期量}=\frac{增长量}{基期量}=\frac{增长量}{现期量-增长量}$$

【注】减少量为带负号的增长量，减少率为带负号的增长率.

2. 基本公式

（1）每期增长率/下降率相同

①基期量×（1＋增长率）^{增长期数}＝现期量（终值），即 $PV\times(1+r)^n=FV$.

②基期量×（1－增长率）^{下降期数}＝现期量（终值），即 $PV\times(1-r)^n=FV$.

【注】n＝1 时，为单一变化率.

（2）每期增长率/下降率不同（各次增长率分别为 r_1，r_2，...，r_n）

① $PV\times(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_n)=FV$；② $PV\times(1-r_1)(1-r_2)\cdots(1-r_n)=FV$.

（3）平均增长率

若初值为 PV，末值为 FV，每年的平均增长率为 r，增长次数为 n，则期末值

$FV = PV \cdot (1+r)^n$ 或 $r = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1$.

题型考法

【真题题型 1】定比例问题——知部求总

（一）命题特点

题目给出了部分量和部分量对应的比例，要求总量的值.

（二）解题思路

套公式、引入比例系数、利用设未知数求解或赋值法进行求解.

【真题重现 1】（2018）学科竞赛设一等奖、二等奖和三等奖，比例为 1∶3∶8，获奖率为 30%，已知 10 人获得一等奖，则参加竞赛的人数为【B】

A. 300

B. 400

C. 500

D. 550

E. 600

【解析】

方法一：根据题意得，一等奖占总获奖的比例为：$\frac{1}{1+3+8}=\frac{1}{12}$.

∵10 人获得一等奖. ∴获奖总人数为：$10\div\frac{1}{12}=120$（人）.

又∵总获奖率＝$\frac{获奖总人数}{参加竞赛总人数}$，由于已知总获奖率为 30%和获奖总人数为 120 人.

∴参加竞赛的总人数为：120÷30%＝400（人）.

方法二：

∵已知总获奖率为 30%，且按 1∶3∶8 的比例分配.

∴一等奖的获奖率为：$30\%\times\frac{1}{1+3+8}=\frac{1}{40}$.

二等奖的获奖率为：$30\%\times\frac{3}{1+3+8}=\frac{3}{40}$.

三等奖的获奖率为：$30\%\times\frac{8}{1+3+8}=\frac{1}{5}$.

又∵10 人获得一等奖. ∴参加竞赛的总人数为：$10\div\frac{1}{40}=400$（人）.

方法三：

根据题意，设每份为 k，则三种奖项获奖人数分别为 k，3k，8k.

已知 10 人获得一等奖⇒ $k=10$.

因此，获奖总人数：$k+3k+8k=12k=120$.

则参加竞赛的总人数为：$120\div30\%=400$（人）.

故选 B.

【真题重现 2】（2017）某人需要处理若干份文件，第一小时处理了全部文件的$\frac{1}{5}$，第二小时处理了剩余文件的$\frac{1}{4}$. 则此人需要处理的文件共 25 份.【D】

（1）前两个小时处理了 10 份文件.

（2）第二小时处理了 5 份文件.

【解析】

根据题意得，设此人需要处理的文件共 x 件.

条件（1），根据条件可得：$\frac{1}{5}x+\left(1-\frac{1}{5}\right)x\cdot\frac{1}{4}=10\Rightarrow x=25$.

故条件（1）充分.

条件（2），根据条件可得：$\left(1-\frac{1}{5}\right)x\cdot\frac{1}{4}=5\Rightarrow x=25$. 故条件（2）充分.

综上，故选 D.

【模拟训练 1】用一笔钱的$\frac{5}{8}$购买甲商品，再以所余金额的$\frac{2}{5}$购买乙商品，最后剩余 900 元，这笔钱的总额是【C】

A. 2400 元

B. 3600 元

C. 4000 元

D. 4500 元

E. 5000 元

【解析】

根据题意，买甲商品用了$\frac{5}{8}$，买乙商品用了$\frac{2}{5}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{20}$，则剩余$1-\frac{5}{8}-\frac{3}{20}=\frac{9}{40}$，所以总额是$\frac{900}{\frac{9}{40}}=4000$元.

故选 C.

【模拟训练 2】奖金发给甲、乙、丙、丁四人，其中$\frac{1}{5}$发给甲，$\frac{1}{3}$发给乙，发给丙的奖金数正好是甲、乙奖金之差的 3 倍，已知发给丁的奖金为 200 元，则总奖金为【D】

A. 1500 元

B. 2000 元

C. 2500 元

D. 3000 元

E. 5000 元

【解析】

假设总奖金为 x 元,则甲的奖金为 $\frac{1}{5}x$ 元,乙的奖金为 $\frac{1}{3}x$ 元,丙的奖金为 $\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{5}x\right)\times3=\frac{2}{5}x$ 元，丁的奖金为 200 元.

则 $\frac{1}{5}x+\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}x+200=x$，化简得 $\frac{1}{15}x=200$，解得 $x=3000$.

故选 D.

【真题题型 2】定比例问题——知部求部

（一）命题特点

题目给出多个部分量两两之间各自的比例关系，要求某一部分量的具体数值或某一部分与总体之间的比例关系。

（二）解题思路

先找出联系各部分量的中间量，再根据中间量在两个比之间的公倍数进行统一，得出所有部分量之间的比，然后再通过设未知数求解或者根据题目条件列等式求解。

【真题重现 1】（2023）已知甲、乙两公司的利润之比为 3∶4，甲、丙两公司的利润之比为 1∶2，若乙公司的利润为 3000 万元，则丙公司的利润为【B】

A. 5000 万元

B. 4500 万元

C. 4000 万元

D. 3500 万元

E. 2500 万元

【解析】

根据题意得：甲∶乙＝3∶4、甲∶丙＝1∶2⇒甲∶乙∶丙＝3∶4∶6.

乙公司 4 份对应 3000 元⇒1 份对应 750 元. 则丙公司 6 份即为 6×750＝4 500 元. 故选 B.

【真题重现 2】（2016）某家庭在一年的总支出中，子女教育支出与生活资料支出的比为 3∶8，文化娱乐支出与子女教育支出的比为 1∶2. 已知文化娱乐支出占家庭总支出的 10.5%，则生活资料支出占家庭总支出的【D】

A. 40%

B. 42%

C. 48%

D. 56%

E. 64%

【解析】

三者的比例关系中间桥梁是“子女教育支出”，因而找出“子女教育支出”两个比之间的公倍数.

根据题意得，子女教育支出∶生活资料支出＝3∶8＝6∶16.

文化娱乐支出∶子女教育支出＝1∶2＝3∶6.

因此，文化娱乐支出∶子女教育支出∶生活资料支出＝3∶6∶16.

∵文化娱乐支出占家庭总支出的 10.5%.

∴家庭总支出为 $10.5\%\div\frac{3}{25}$.

则生活资料支出占家庭总支出的 $10.5\%\div\frac{3}{25}\times\frac{16}{25}=56\%$.

故选 D.

【模拟训练】某高速公路收费站对过往车辆收费标准是大客车 10 元，小客车 6 元，小轿车 3 元。某日该收费站通过大、小客车之比是 5:6，小客车与小轿车之比是 4:7，共收费 4700 元，则通过小轿车的数量为____辆.【A】

A. 420

B. 400

C. 252

D. 240

E. 200

【解析】

统一比例关系，因为 6 和 4 的最小公倍数为 12，则大客车：小客车：小轿车＝10：12：21.

故设这三种车的数量分别为 10x，12x，21x，则收费为：

$$10x\cdot10+12x\cdot6+21x\cdot3=4700,$$

解得 x＝20，故小轿车的数量为 21×20＝420 辆. 故选 A.

【真题题型 3】变比例问题

（一）命题特点

给出变化前/后的比例关系，要求变化后/前的比例关系.

（二）解题思路

根据已知的比例关系设出未知数，然后再根据题意列方程求解.

【真题重现】（2024）甲股票上涨 20%后价格与乙股票下跌 20%后的价格相等，则甲、乙股票的原价格之比为____.【E】

A. 1:1

B. 1:2

C. 2:1

D. 3:2

E. 2:3

【解析】

设甲原价格为 x，乙原价格为 y，甲股票上涨 20%后的价格为 $x(1+20\%)=1.2x$，乙股票下跌 20%后的价格为 $y(1-20\%)=0.8y$.

因为甲股票上涨 20%后价格与乙股票下跌 20%后的价格相等，所以，$1.2x=0.8y$，即 $\frac{x}{y}=\frac{0.8}{1.2}=\frac{2}{3}$.

故选 E.

【模拟训练】小明和小强原有的图画纸数量之比是 4:3, 小明又买来 15 张. 小强用掉了 8 张，现有的图画纸数量之比是 5:2. 原来小明比小强多____张图画纸. 【E】

A. 5

B. 6

C. 8

D. 9

E. 10

【解析】

设小明和小强原有的图画纸数量分别是 4x 和 3x.

则有 $\frac{4x+15}{3x-8}=\frac{5}{2}$, 解得 x＝10.

故小明和小强原有图画纸的数量分别为 40 和 30.

所以原来小明比小强多 10 张画纸. 故选 E.

【真题题型 4】连续增长率

（一）解题思路

明确基准量，根据公式进行分析.

【真题重现 1】（2020）某产品去年涨价 10%，今年涨价 20%，则该产品这两年涨价【D】

A. 15%

B. 16%

C. 30%

D. 32%

E. 33%

【解析】

根据题意，设该产品前年的价格为单位“1”，则今年涨价后的价格为1×（1＋10%）×（1＋20%）＝1.32，所以该产品这两年的增长率为（1.32－1）÷1×100%＝32%. 故选D.

【真题重现2】（2017）某品牌的电冰箱连续两次降价10%后的售价是降价前的【B】

A. 80%

B. 81%

C. 82%

D. 83%

E. 85%

【解析】

根据题意，设降价前的售价为a，则两次降价后的售价为$a(1-10\%)^2$.

$\frac{a(1-10\%)^2}{a}\times 100\%=0.9^2\times 100\%=0.81\times 100\%=81\%$. 故选B.

【模拟训练1】某种药品零售价去年上涨，但今年却调低了20%，而现零售价是前年零售价的94.4%，则去年这种药品的零售价上涨率是【B】

A. 22%

B. 18%

C. 16%

D. 20%

E. 15%

【解析】

设上涨率为x，前年零售价为y.

根据题意分析可得下表.

前年零售价	去年零售价	今年零售价
y	y（1＋x）	y（1＋x）（1－20%）

由此可得：$\frac{y(1+x)(1-20\%)}{y}=94.4\%\Rightarrow x=18\%$.

故选B.

【模拟训练2】银行的一年定期存款利率为10%，某人于2016年1月1日存入10000元，2019年1月1日取出，若按复利计算，他取出时所得的本金和利息共计是【D】

A. 10300元

B. 10303元

C. 13000元

D. 13310元

E. 14641元

【解析】

本息共计 $10000\times(1+10\%)^3=13310$ 元. 故选 D.

【真题题型 5】平均增长率

（一）解题思路

根据公式进行分析.

【真题重现 1】（2017）能确定某企业产值的月平均增长率.【E】

（1）已知一月份的产值.

（2）已知全年的总产值.

【解析】

根据平均增长率公式可知平均增长率仅与初始值及终值有关.

条件（1），仅能确定一月份的产值（初始值），不能确定十二月份的产值（终值），即无法确定该企业产值的月平均增长率. 故条件（1）不充分.

条件（2），仅能确定全年的总产值，不能确定一月份的产值（初始值）和十二月份的产值（终值），即无法确定该企业产值的月平均增长率. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合，无法确定十二月份的产值（终值），即无法确定该企业产值的月平均增长率. 故条件（1）（2）联合起来也不充分.

综上，故选 E.

【真题重现 2】（2015）某新兴产业在 2005 年末至 2009 年末产值的年平均增长率为 q，在 2009 年末至 2013 年末产值的年平均增长率比前四年下降了 40%，2013 年的产值约为 2005 年产值的 14.46（$\approx1.95^4$）倍，则 q 的值约为【E】

A. 30%

B. 35%

C. 40%

D. 45%

E. 50%

【解析】

根据题意，设 2005 年产值为 1，到 2009 年经过 4 年，年产值达到$(1+q)^4$.

∵从 2009 年末至 2013 年末 4 年间，年增长率为 0.6q.

∴2013 年的产值为$(1+q)^4(1+0.6q)^4=14.46\approx1.95^4$.

整理得，$[(1+q)(1+0.6q)]^4\approx1.95^4\Rightarrow(1+q)(1+0.6q)\approx1.95\Rightarrow12q^2+32q-19\approx0\Rightarrow(2q-1)(6q+19)\approx0\Rightarrow q=\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{19}{6}$（舍去）.

即 $q=\frac{1}{2}\Rightarrow q=50\%$.

故选 E.

【模拟训练 1】一双鞋，参加打折活动，最后的价格相当于降价 36%.如果分两次降价，最后售价与参加打折活动后的价格相同，那么平均每次降价幅度为【D】

A. 30%

B. 25%

C. 22%

D. 20%

E. 18%

【解析】

设原价 100 元，则打折后的价格为 $100\times(1-36\%)=64$ 元.

如果分两次降价，设平均每次降价的幅度为 x.

故有 $100(1-x)^2=64$，解得 $x=20\%$.

故选 D.

【模拟训练 2】已知我国 1975 年造林 200 亩，又知 1975 年至 1977 年这三年内共造林 728 亩，每年的年平均增长率保持不变，则年平均增长率是【B】

A. 15%

B. 20%

C. 25%

D. 27.5%

E. 30%

【解析】

设年平均增长率为 x，则有 $200+200(1+x)+200(1+x)^2=728$，化简得 $x^2+3x-0.64=(x-0.2)(x+3.2)=0$,

解得 $x=0.2$ 或 $x=-3.2$(舍去)，故年平均增长率为 20%.

故选 B.

第二节 行程问题

知识点讲解

（一）直线路程问题

1. 基本公式： $S=vt$，$t=\dfrac{S}{v}$，$v=\dfrac{S}{t}$.

2. 直线相遇公式： $S_{相遇}=S_1+S_2=v_1t+v_2t=(v_1+v_2)\cdot t$

3. 直线追及公式： $S_{追及}=S_1-S_2=v_1t-v_2t=(v_1-v_2)\cdot t$

（二）水中行船问题

1. 船顺流时速度： $v_{顺水}=v_{船}+v_{水}$

2. 船逆流时速度： $v_{逆水}=v_{船}-v_{水}$

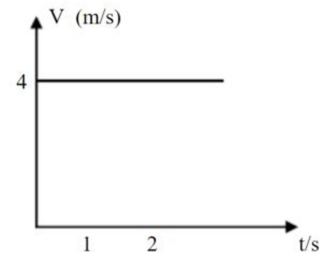
3. 船在静水中的速度： 船速＝（顺水速度＋逆水速度）÷2

4. 水速： （顺水速度－逆水速度）÷2

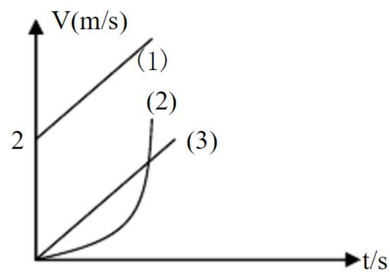
（三）图像路程问题：v－t 图

v－t 图中，横轴为时间，纵轴为速度. 当图形为直线时，直线斜率表示加速度，当斜率为 0 时，表示匀速运动. 直线与坐标轴围成的面积为对应时间段内的路程.

1. 匀速运动



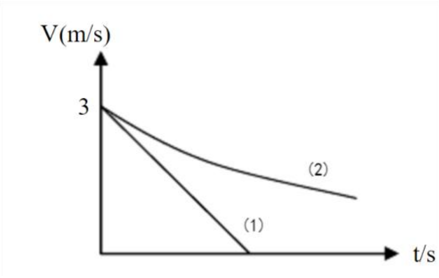
2. 加速运动



（1）初速是 2 的加速运动

（2）初速是 0 的变加速运动

（3）初速是 0 的加速运动



（1）初速是 3 的减速运动

（2）初速是 3 的变减速运动

题型考法

【真题题型 1】基本公式应用

（一）解题思路

根据基本公式、线段图列方程或 v-t 图进行分析.

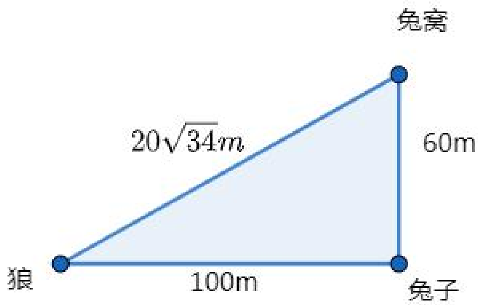
【真题重现 1】（2024）兔窝位于兔子正北 60 米，狼在兔子正西 100 米，兔子和狼同时直奔兔窝，则兔子率先到达兔窝.【A】

（1）兔子的速度是狼的速度的$\frac{2}{3}$

（2）兔子的速度是狼的速度的$\frac{1}{2}$

【解析】

因为兔窝位于兔子正北 60 米，狼在兔子正西 100 米，根据勾股定理，狼和兔窝的直线距离为$\sqrt{60^2+100^2}=20\sqrt{34}$米. 兔子和狼同时直奔兔窝，则兔子和狼到达兔窝所需走的总路程分别为 60m 和$20\sqrt{34}$m.



若兔子率先到达兔窝，则兔子到达兔窝的时间＜狼到达兔窝的时间，又因为$t=\frac{s}{v}$，即有$\frac{60}{V_{兔}}<\frac{20\sqrt{34}}{V_{狼}}$，化简得$\frac{V_{兔}}{V_{狼}}>\frac{60}{20\sqrt{34}}=\frac{3}{\sqrt{34}}$，即$(\frac{V_{兔}}{V_{狼}})^2>\frac{9}{34}\approx 0.26$即可.

条件（1），兔子的速度是狼的速度的$\frac{2}{3}$，即$\frac{V_{兔}}{V_{狼}}=\frac{2}{3}$，平方得$(\frac{V_{兔}}{V_{狼}})^2=\frac{4}{9}>\frac{9}{34}\approx 0.26$，故条件（1）充分.

条件（2），兔子的速度是狼的速度的$\frac{1}{2}$，即$\frac{V_{兔}}{V_{狼}}=\frac{1}{2}$，平方得$(\frac{V_{兔}}{V_{狼}})^2=\frac{1}{4}=0.25<\frac{9}{34}\approx 0.26$，故条件（2）不充分.

故选 A.

【真题重现 2】（2015）某人驾车从A地赶往B地，前一半路程比计划多用时 45 分钟，平均速度只有计划的 80%. 若后一半路程的平均速度为 120 千米/小时，此人还能按原定时间到达B地. 则A、B两地的距离为【D】

A. 450 千米

B. 480 千米

C. 520 千米

D. 540 千米

E. 600 千米

【解析】

根据题意，设A、B两地的距离为S，原计划的平均速度为v. 45 分钟$=\frac{3}{4}$小时.

则有$\begin{cases}\frac{0.5S}{0.8v}-\frac{0.5S}{v}=\frac{3}{4}\\ \frac{0.5S}{0.8v}+\frac{0.5S}{120}=\frac{S}{v}\end{cases}$，解得$\begin{cases}S=540\\ v=90\end{cases}$. 即$A$、$B$两地的距离为 540 千米. 故选 D.

【真题重现 3】（2022）已知 A，B 两地相距 208km，甲、乙、丙三车的速度分别为 60km/h，80km/h，90km/h，甲、乙两车从 A 地出发去 B 地，丙车从 B 地出发去 A 地，三车同时出发，当丙车与甲、乙两车的距离相等时，用时【C】

A. 70min

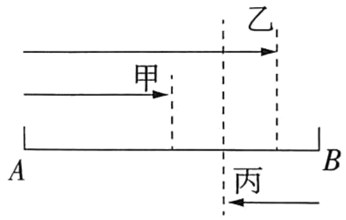
B. 75min

C. 78min

D. 80min

E. 86min

【解析】根据题意可画线段图，如图所示.



设用时 t 小时，甲车的路程：60t；乙车的路程：80t；丙车的路程：90t.

丙车与甲、乙两车的距离相等.

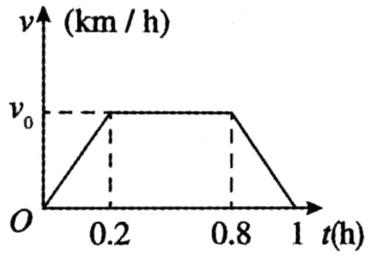
丙车与甲车的距离为：208－60t－90t.

丙车与乙车的距离为：80t＋90t－208.

可列方程为：208－60t－90t＝80t＋90t－208⇒ $t=\frac{13}{10}$ 小时＝78 min.

故选 C.

【真题重现 4】（2019）货车行驶 72 千米用时 1 小时，其速度 v 与行驶时间 t 的关系如图所示，则 v_0 ＝【C】



A. 72

B. 80

C. 90

D. 95

E. 100

【解析】根据题意得，s＝vt 图像围成的面积等于路程，即梯形的面积表示路程.

因此，$\frac{1}{2}[(0.8-0.2)+(1-0)](v_0-0)=72$. 解得 $v_0=90$.

故选 C.

【模拟训练 1】甲地到乙地是斜坡路，一辆货车上坡速度是每小时 30 千米，下坡速度是每小时 60 千米，这辆货车在甲、乙两地间往返一次共需 4.5 小时，甲、乙两地相距____千米.【A】

A. 90

B. 60

C. 80

D. 45

E. 120

【解析】设路程为 S 千米，由题意得 $\frac{S}{30}+\frac{S}{60}=4.5\Rightarrow S=90$.

故选 A.

【模拟训练 2】长途汽车从 A 站出发，匀速行驶，1 小时后突然发生故障，车速降低了 40%，到 B 站终点延误达 3 小时，若汽车能多跑 50 千米后，才发生故障，坚持行驶到 B 站能少延误 1 小时 20 分钟，那么 A，B 两地相距____千米.【E】

A. 412.5

B. 125.5

C. 146.5

D. 152.5

E. 137.5

【解析】设原来车速为 v 千米/小时，则有 $\frac{50}{v(1-40\%)}-\frac{50}{v}=\frac{4}{3}$，解得 v＝25 千米/小时.

再设原来需要 t 小时到达，由已知有 25t＝25＋(t＋3－1)×25×(1－40%)，解得 t＝5.5 小时，所以 25×5.5＝137.5 千米.

故选 E.

【模拟训练 3】甲每分钟走 50 米，乙每分钟走 60 米，丙每分钟走 70 米，甲乙两人从 A 地，丙一人从 B 地同时相向出发，丙遇到乙后 2 分钟又遇到甲，AB 两地相距____米.【A】

A. 3120

B. 3110

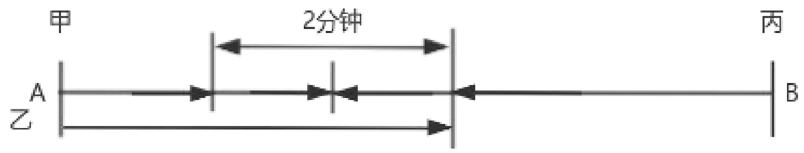
C. 3100

D. 3130

E. 3140

【解析】

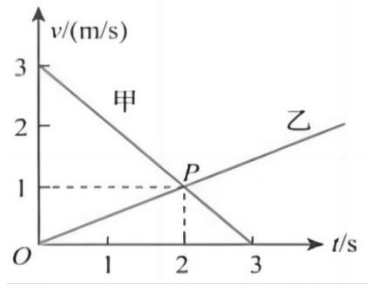
根据题意可画如下线段图：



设丙与乙用了 t 分钟相遇，则丙与甲用了（t＋2）分钟相遇.可知：60t＋70t＝50（t+2）＋70（t＋2），解得 t＝24，则 AB 两地距离＝60×24＋70×24＝3120 米.

故选 A.

【模拟训练 4】如图，表示甲、乙两物体的 v－t 运动图像，则下列正确的结论有____个.【C】



（1）甲乙两物体都做匀变速运动

（2）两物体的交点 P 表示 t＝2s 时，两物体相遇

（3）在 t＝2s 之前，甲的速度大于乙，且甲在前，乙在后

（4）甲的初速度为 3m/s，当 t＝3s 时，甲的速度为零.

A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 3 个

E. 4 个

【解析】

由于甲、乙都是斜率不为零的直线，所以都是匀变速运动（1）正确；

两物体的交点只表示两者的速度相同，不确定是否相遇，所以（2）错误；

在 t＝2 秒之前，甲的图像高于乙的图像，所以甲的速度大于乙，但无法确定甲、乙的位置，所以（3）错误；

甲的初速度为 3 米/秒，当 t＝3 秒时，甲的速度为零，所以（4）正确.

共两个正确，故选 C.

【真题题型 2】直线单次相遇

（一）解题思路

根据题目所给条件设未知数列方程进行分析.

【真题重现 1】（2016）上午 9 时一辆货车从甲地出发前往乙地，同时一辆客车从乙地前往甲地，中午 12 时两车相遇. 已知货车和客车的时速分别是 90 千米和 100 千米，则当客车到达甲地时，货车距乙地的距离为【E】

A. 30 千米

B. 43 千米

C. 45 千米

D. 50 千米

E. 57 千米

【解析】根据题意，两车经过 3（12－9）小时相遇，则甲乙两地距离为（90＋100）×3＝570（千米）.

∵客车到达甲地时，客车行驶的总时间为 570÷100＝5.7（小时）.

∴在客车到达甲地时，货车行驶的总路程为 90×5.7＝513（千米）.

则货车距乙地的距离为 570－513＝57（千米）.

故选 E.

【真题重现 2】（2021）甲、乙两人相距 330 千米，他们驾车同时出发，经过 2 小时相遇，甲继续行驶 2 小时 24 分钟后到达乙的出发地，则乙的车速为____千米/小时.【D】

A. 70

B. 75

C. 80

D. 90

E. 96

【解析】

方法一：设甲、乙两人的速度分别为 v_1 千米/小时、v_2 千米/小时. 根据题意有：

$$\begin{cases}(v_1+v_2)\times 2=330\\ v_1\times\left(2+2\dfrac{24}{60}\right)=330\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_1=75\\ v_2=90\end{cases}$$. 则乙的车速为 90 千米/小时.

方法二：甲从出发地到相遇位置所用时间为 120 分钟（2 小时），从相遇位置到乙出发地所用时间为 144 分钟（2 小时 24 分钟），则时间比为 120∶144＝5∶6，故两段路程比为 5∶6，即甲、乙的速度比为 5∶6.

∵路程÷相遇时间＝速度和. ∴330÷2＝165（千米）. 故乙的速度为 165×$\frac{6}{11}$＝90（千米/小时）.

故选 D.

【模拟训练 1】甲、乙二人从相距 100 千米的 A、B 两地同时出发匀速相向而行，甲步行，乙骑车，中途乙的车发生故障，停修 1 小时，在出发 4 小时后，甲、乙二人相遇. 又已知乙的速度为甲的 2 倍，且相遇时乙的车已修好，那么乙的速度是【D】

A. 40km/h

B. 30km/h

C. 25km/h

D. 20km/h

E. 10km/h

【解析】

设甲速度为 xkm/h，则乙的速度为 2xkm/h.

根据题意得：4x＋（4－1）・2x＝100，解得 x＝10.

则乙的速度为 20km/h.

故选 D.

【模拟训练 2】甲、乙两人分别从相距 27 千米的 A、B 两地同时出发，相向而行，3 小时相遇，相遇后两人各用原来的速度继续前进，甲到达 B 地比乙到达 A 地快 1 小时 21 分，则甲、乙两人的速度分别为____千米/小时.【D】

A. 7，2

B. 4，5

C. 6，3

D. 5，4

E. 3，6

【解析】

设甲、乙两人的速度分别为 v_1 千米/小时，v_2 千米/小时.

由于 1 小时 21 分＝$\frac{81}{60}$ 小时，则根据题意得：$\begin{cases} 3\times(v_1+v_2)=27 & ① \\ \frac{27}{v_2}-\frac{27}{v_1}=\frac{81}{60} & ② \end{cases}$，由①得：$v_1$＝9－$v_2$ 代入②整理得：$v_2^2-49v_2+180=0$，解得 v_2＝4 千米/小时或 45 千米/小时（舍去）. 所以 v_1＝9－4＝5 千米/小时.

故选 D.

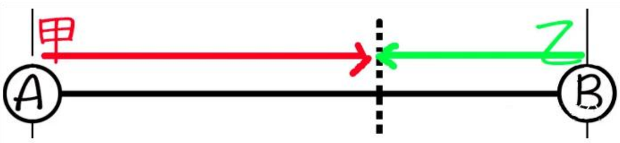
【真题题型 3】直线往返多次相遇

（一）解题思路

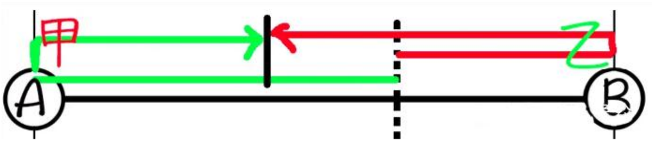
根据题中基本等量关系或线段图进行分析.

基本等量关系：

甲乙同时两端相向出发，相遇后折返再相遇，不停折返不停相遇. 第一次相遇时甲乙走过的路程和为 S，画图表示为：



此后继续走，折返后再次相遇图示为：



此后的每一次相遇走过的路程和均为$2S$，每次相遇甲、乙走过的路程与上一次相遇走过的路程相同，且若设第一次相遇时间为t，此后每次相遇所需时间为$2t$．所以，相遇n次走过的路程和$=2(n-1)S+S=(2n-1)S=(v_1+v_2)\cdot t$．

【真题重现 1】（2020）甲、乙两人从相距 1800 米的两地同时出发，多次往返行走，甲每分钟走 100 米，乙每分钟走 80 米，则两人第三次相遇时，甲距其出发点____米.【D】

A. 600

B. 900

C. 1000

D. 1400

E. 1600

【解析】

方法一：已知两地相遇问题，第一次相遇，路程和为 S，每再相遇一次，路程和就会多走 2S，因此相遇三次，则路程和为 S＋2S＋2S＝5S ⇒5×1800＝9000（米）.

故此时所用时间为 $\frac{9000}{100+80}$＝50（分钟）. 因此甲走过的路程为 100×50＝5000（米）.

故甲距其出发点的距离为 5000－2S＝5000－1800×2＝1400（米）.

方法二：已知两地相遇问题，第一次相遇，路程和为 S，每再相遇一次，路程和就会多走 2S，因此相遇三次，则路程和为 S＋2S＋2S＝5S ⇒5×1 800＝9 000（米）.

由题意得，$v_甲:v_乙=5:4$，$t_甲=t_乙$，则$S_甲:S_乙=5:4$.

设甲的路程为 5a，乙的路程为 4a，则 5a＋4a＝9a＝5S＝9000⇒ a＝1000.

因此甲共走了 5a＝5×1000＝5000（米）.

故甲距其出发点的距离为 5000－1800×2＝1400（米）.

故选 D.

【真题重现 2】（2014）甲、乙两人上午 8∶00 分别自A，B两地出发相向而行，9∶00 第一次相遇，之后速度均提高了 1.5 千米/小时，甲到B地、乙到A地后都立刻沿原路返回. 若两人在 10∶30 第二次相遇，则A，B两地的距离为【D】

A. 5.6 千米

B. 7 千米

C. 8 千米

D. 9 千米

E. 9.5 千米

【解析】

根据题意，设A，B两地的距离为S千米，甲、乙两人的速度分别为$v_{甲}$、$v_{乙}$.

第一次相遇：$(v_{甲}+v_{乙})\times 1=S$. ①

第二次相遇：$[(1.5+v_{甲})+(1.5+v_{乙})]\times 1.5=2S$. ②

结合①②得：$S=9$. 即A，B两地的距离为 9 千米. 故选 D.

【模拟训练 1】小张、小明两人同时从甲、乙两地出发相向而行，两人在离甲地 40 米处第一次相遇，相遇后两人仍以原速继续行驶，并且在各自到达对方出发点后立即沿原路返回，途中两人在距乙地 15 米处第二次相遇，甲、乙两地相距____米.【D】

A. 80

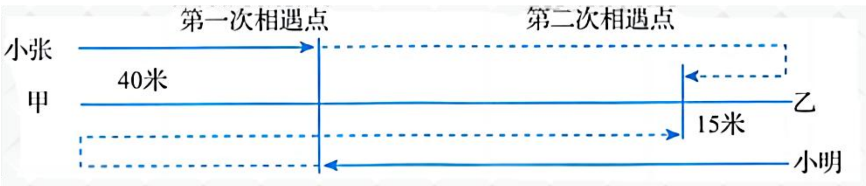
B. 90

C. 100

D. 105

E. 120

【解析】根据题意画图：



从图可知，小张、小明两人第一次相遇时，共行的路程即是甲、乙两地之间的距离，这时，小张行了 40 米. 当他们第二次相遇时，两个人共行了甲、乙间距离的 3 倍. 因此小张从出发到第二次相遇所行的路程为 $40\times 3=120$ 米. 又知这段路程比甲、乙间距离多 15 米，甲、乙间距离为 $120-15=105$ 米. 故选 D.

【模拟训练 2】甲、乙两人分别自A，B两地同时出发相向而行，出发 4 个小时后两人第一次相遇，之后速度均提高了 2 千米/小时，甲到B地、乙到A地后都立刻沿原路返回. 又经过了 3 小时，两人第二次相遇，则A，B两地的距离为【D】

A. 9.9 千米

B. 9.8 千米

C. 9.7 千米

D. 9.6 千米

E. 9.5 千米

【解析】

根据题意，设A，B两地的距离为S千米，甲、乙两人的速度分别为$v_{甲}$、$v_{乙}$.

第一次相遇：$(v_{甲}+v_{乙})\times 4=S$. ①

第二次相遇：$[(2+v_{甲})+(2+v_{乙})]\times 3=2S$. ②

结合①②得：$S=9.6$. 即A，B两地的距离为 9.6 千米.

故选 D.

【真题题型 4】直线追及

（一）解题思路

根据题目所给条件设未知数列方程进行分析.

【真题重现 1】（2013）甲、乙两人同时从A点出发，沿 400 米跑道同向匀速行走，25 分钟后乙比甲少走了一圈.若乙行走一圈需要 8 分钟，则甲的速度是____.（单位：米/分钟）【C】

A. 62

B. 65

C. 66

D. 67

E. 69

【解析】

根据题意，甲的速度比乙的速度快，且乙的速度为 $400\div 8=50$（米/分钟）.

则将已知条件代入计算公式得：$400=$（甲的速度-50）$\times 25\Rightarrow$甲的速度$=66$（米/分钟）.

故选 C.

【真题重现 2】（2023）甲乙两人从同一地点出发，甲先出发 10 分钟，若乙跑步追赶甲，则 10 分钟可追上，若乙骑车追赶甲，每分钟比跑步多行 100 米，则 5 分钟可追上，那么甲每分钟走的距离为【C】

A. 50 米

B. 75 米

C. 100 米

D. 125 米

E. 150 米

【解析】根据题意，设甲的速度为$v_{甲}$，乙的速度为$v_{乙}$. 因为乙追上甲时，二人走过的路程一样，所以有：$\begin{cases}20v_{甲}=10v_{乙}\\15v_{甲}=5(100+v_{乙})\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_{甲}=100\\v_{乙}=200\end{cases}$.

故选 C.

【模拟训练 1】好马每天走 120 千米，劣马每天走 75 千米，劣马先走 12 天，好马____天能追上劣马.【C】

A. 12

B. 16

C. 20

D. 22

E. 24

【解析】劣马先走 12 天能走 75×12＝900 千米.

好马追上劣马的时间 900÷(120－75)＝20 天. 故选 C.

【模拟训练 2】小胖早上从家步行去学校上学，20 分后，小胖的爸爸发现他忘了带语文书. 若爸爸跑步去追小胖，则 10 分钟后可追上，若爸爸骑车去追小胖，则 5 分钟后可追上. 爸爸骑车的速度比跑步快 100 米/分. 则小胖的步行速度为____米/分【A】

A. 50

B. 60

C. 70

D. 80

E. 90

【解析】

根据题意，设小胖步行的速度为 v_1，爸爸步行的速度为 v_2.

因为爸爸追上小胖时，二人走过的路程一样.

所以有：$\begin{cases}30v_1=10v_2\\25v_1=5(100+v_2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_1=50\\v_2=150\end{cases}$.

故选 A.

【真题题型 5】行船问题

（一）解题思路

根据题目所给条件设未知数列方程进行分析.

【真题重现】（2024）甲、乙两码头相距 100 千米，一艘游轮从甲地顺流而下，到达乙地用了 4 小时，返回时游轮的静水速度增加了 25%. 用了 5 小时，则航道的水流速度为____.【D】

A. $3.5km/h$

B. $4km/h$

C $4.5km/h$

D. $5km/h$

E. $5.5km/h$

【解析】

设船的初始静水速度为 $x\ km/h$，水流速度为 $v\ km/h$.

由于游轮从甲地顺流而下到乙地用时 4 小时，总行程为 100km，所以游轮顺水行驶的速度

为$100\div4=25km/h$，即$x+v=25$，记为方程①.

因为返回时为逆水行驶，且游轮的静水速度增加了25%，所以游轮的返程速度为$[x(1+25\%)-v]\ km/h$.因为返回用时5小时，所以返程速度为$100\div5=20km/h$，所以有$x(1+25\%)-v=20$，记为方程②.

将方程①代入方程②，得$1.25x-(25-x)=20$，即$2.25x=45$，解得$x=20$.故$v=25-20=5$.

所以水流速度$v=5km/h$.

故选D.

【模拟训练】已知船在静水中的速度为28千米/小时，水流的速度为2千米/小时.则此船在相距78千米的两地间往返一次所需时间是____小时.【B】

A. 5.9

B. 5.6

C. 5.4

D. 4.4

E. 4

【解析】

设v代表船速，v_0代表水速，s代表路程，t代表往返所用的时间.

则有$t=\dfrac{s}{v+v_0}+\dfrac{s}{v-v_0}=\dfrac{78}{30}+\dfrac{78}{26}=5.6$小时.

故选B.

第三节 工程问题

知识点讲解

工作总量＝工作效率×工作时间.

工作时间＝工作总量÷工作效率.

工作效率＝工作总量÷工作时间.

题型考法

【真题题型 1】合作完工问题

（一）命题特点

题目出现多人合作完工.

（二）解题思路

可通过单位“1”法设出每个人单独的工作效率，从而得出合作时的工作效率.

如：将任意一个总的工作量看作单位“1”，若甲单独完成需要m天，乙单独完成需要n天，则甲单独的工作效率为$\frac{1}{m}$每天，乙单独的工作效率为$\frac{1}{n}$每天，甲乙合作的效率为$(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})$每天.

【真题重现】（2021）清理一块场地，则甲、乙、丙三人能在 2 天内完成.【E】

（1）甲、乙两人需要 3 天完成.

（2）甲、丙两人需要 4 天完成.

【解析】

条件（1），丙的工作效率未知.故条件（1）不充分.

条件（2），乙的工作效率未知.故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

设工作总量为 1，甲、乙、丙的效率分别为$v_{甲}$、$v_{乙}$、$v_{丙}$.

条件（1）（2）联合得：$\begin{cases} v_{甲}+v_{乙}=\frac{1}{3} \\ v_{甲}+v_{丙}=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow v_{甲}+(v_{甲}+v_{乙}+v_{丙})=\frac{7}{12}$.

因为甲的工作效率未知，所以条件（1）（2）联合起来也不充分.

综上，故选 E.

【模拟训练】甲、乙两人合作某项工作，10 天后，甲因故离开，乙继续工作了 2 天后完成了该项工作.如果单独完成该项工作，甲比乙要少用 4 天，则乙单独完成该项工作需____天.【A】

A. 24

B. 23

C. 22

D. 21

E. 20

【解析】

设工作总量为单位 1，甲单独完成工作天数为 m，乙单独完成工作天数为 n，则可以得到甲的工作效率为 $\frac{1}{m}$，乙的工作效率为 $\frac{1}{n}$.

由题意得：$\begin{cases}10\times(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})+\frac{2}{n}=1 & ① \\ n-m=4 & ②\end{cases}$，由②得：$m=n-4$，代入①整理得：$n^2-26n+48=0\Rightarrow n=24$ 或 2（舍去）.

所以乙单独进行该项工作需 24 天.

故选 A.

【真题题型 2】工作效率变化问题

（一）命题特点

完成某项工作的过程中，因各种原因工作效率发生变化.

（二）解题思路

根据效率变化前后的时间关系列方程求解.

【真题重现 1】（2022）一项工程施工 3 天后，因故障停工 2 天，之后工程队提高工作效率 20%，仍能按原计划完成. 则原计划工期为【D】

A. 9 天

B. 10 天

C. 12 天

D. 15 天

E. 18 天

【解析】

方法一：

根据题意可知提高效率前后工作总量不变，此时工作效率 p 与工作时间 t 成反比，即 $\frac{p_{原}}{p_{提}}=\frac{1}{(1+0.2)}=\frac{5}{6}$，则 $\frac{t_{原}}{t_{提}}=\frac{6}{5}$，$\Delta t=6-5=1$ 份，而提高工作效率前后时间相差 2 天，即 1 份对应 2 天. 原计划时间为 $6\times2=12$ 天，由于效率提高前已经施工了 3 天，所以原计划工期为 $12+3$

=15 天.

方法二：

设原计划工作 x 天，每天的工作效率为 1，则剩余工作量为（x−3），剩余工作时间为（x−5），之后提高工作效率 20%，即每天的工作效率为 1.2，还能按照原计划完成工作，则有 1.2（x−5）=1（x−3）⇒ x=15.

故选 D.

【真题重现 2】（2019）某车间计划 10 天完成一项任务，工作 3 天后因故停工 2 天.若仍要按原计划完成任务，则工作效率需要提高【C】

A. 20%

B. 30%

C. 40%

D. 50%

E. 60%

【解析】

根据题意，设工作总量为 1，则计划每天的工作效率为 $\frac{1}{10}$.

前面三天的工作总量为 $\frac{3}{10}$，剩余的工作总量为 $1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$.

根据题意，剩余的工作时间为 10−3−2=5 天，因此剩下 5 天的工作效率为 $\frac{7}{10}\div 5=\frac{7}{50}$.

现在的工作效率比原来的工作效率高 $\frac{7}{50}-\frac{1}{10}=\frac{2}{50}$.

因此，需在原工作效率上提高 $\frac{2}{50}\div\frac{1}{10}=\frac{2}{5}\times 100\%=40\%$.

即提高 40%的工作效率才能按原计划完成.

故选 C.

【模拟训练 1】某电视机厂计划生产一批电视机，开始每天生产 50 台，生产了计划的 $\frac{1}{5}$ 之后，由于技术改造工作效率提高了 60%，这样完成任务比计划提前了 3 天，则该厂生产电视机的总台数为【C】

A. 700

B. 600

C. 500

D. 400

E. 300

【解析】

设总台数为 S，则计划工作天数为 $\frac{S}{50}$，实际工作天数为 $\frac{\frac{1}{5}S}{50}+\frac{\frac{4}{5}S}{50\times(1+60\%)}$，所以 $\frac{S}{50}-\left[\frac{\frac{1}{5}S}{50}+\frac{\frac{4}{5}S}{50\times(1+60\%)}\right]=3$，解得 $S=500$.

故选 C

【模拟训练 2】某施工队承担了开凿一条长为 2400 米隧道的工程，在掘进了 400 米后，由于改进了施工工艺，每天比原计划多掘进 2 米，最后提前 50 天完成了施工任务，原计划施工工期是____天.【D】

A. 200

B. 240

C. 250

D. 300

E. 350

【解析】

设原计划的工作效率为 v，则有 $\frac{2000}{v}-\frac{2000}{v+2}=50\Rightarrow\frac{4000}{v(v+2)}=50$，解得 $v=8$ 或 $v=-10$（舍去）. 则原计划工期为 $2400\div8=300$ 天.

故选 D.

【真题题型 3】效率正负问题（牛吃草问题）

（一）命题特点

一个水池，同时进水和排水，进水和排水的效率不一致，求解相关问题.

（二）解题思路

将进水管的效率看成正的，排水管的效率看成负的，结合相关公式列方程分析求解.

【真题重现】（2024）在雨季，某水库的需水量已达警戒水位，同时上游来水注入水库，需要及时泄洪，若开 4 个泄洪闸则水库的蓄水量到安全水位要 8 天，若开 5 个泄洪闸则水库的蓄水量到安全水位要 6 天，若开 7 个泄洪闸则水库的蓄水量到安全水位要____.【B】

A. 4.8 天

B. 4 天

C. 3.6 天

D. 3.2 天

E. 3 天

【解析】

设总水量为M，安全水量为N，每个泄洪闸每天放水a，每天上游来水b，开 7 个泄洪闸水库蓄水量到安全水位要x天.

因为开 4 个泄洪闸则水库的蓄水量到安全水位要 8 天，所以有方程①：$M+8b-8\times 4a=N$；

开 5 个泄洪闸则水库的蓄水量到安全水位要 6 天，所以有方程②：$M+6b-6\times 5a=N$；

开 7 个泄洪闸则水库的蓄水量到安全水位要 x 天，所以有方程③：$M+x\cdot b-x\cdot 7a=N$；

由①－②，得$8b-32a-6b+30a=0$，即$2b-2a=0$，解得$b=a$.

由②－③，得$6b-30a-x\cdot b+7a=0$，即$(6-x+7x-30)\cdot b=0$，因为$b\neq 0$，解得$x=4$.

故选 B.

【模拟训练】一个水池，上部装有若干同样粗细的进水管，底部装有一个常开的排水管，当打开 4 个进水管时，需要 4 小时才能注满水池；当打开 3 个进水管时，需要 8 小时才能注满水池，现需要 2 小时内将水池注满，至少要打开____个进水管.【C】

A. 8

B. 7

C. 6

D. 5

E. 4

【解析】

设一个进水管的效率为 x，排水管的效率为 y.

由题意得：$\begin{cases}4\cdot 4\cdot x-4\cdot y=1\\3\cdot 8\cdot x-8\cdot y=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=\dfrac{1}{8}\\y=\dfrac{1}{4}\end{cases}$.

若要 2 小时注满水，设至少打开 n 个进水管，则$n\cdot 2\cdot\dfrac{1}{8}-2\cdot\dfrac{1}{4}=1$，得 n＝6.

故选 C.

【真题题型 4】工费计算问题

（一）命题特点

多人合作完工，给出总工费，求各自单独的工费.

（二）解题思路

一般需要列两组方程组进行求解：

第一组：工作效率×工作时间＝工作总量；

第二组：单位时间工费×工作时间＝总工费.

【真题重现】（2019）某单位要铺设草坪，若甲、乙两公司合作需 6 天完成，工时费共计 2.4 万元；若甲公司单独做 4 天后由乙公司接着做 9 天完成，工时费共计 2.35 万元. 若由甲公

司单独完成该项目，则工时费共计【E】

A. 2. 25 万元

B. 2. 35 万元

C. 2. 4 万元

D. 2. 45 万元

E. 2. 5 万元

【解析】

设甲单独做需要a天完成，工时费用x万元/天；乙单独做需要b天完成，工时费用y万元/天.

则有$\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6}\\ \frac{4}{a}+\frac{9}{b}=1\end{cases}$和$\begin{cases}6(x+y)=2.4\\ 4x+9y=2.35\end{cases}$.

解得：$\begin{cases}a=10\\ b=15\end{cases}$和$\begin{cases}x=0.25\\ y=0.15\end{cases}$.

因此，甲单独完成，工时费用共计为ax＝0. 25×10＝2. 5（万元）.

故选 E.

【模拟训练】公司的一项工程由甲、乙两队合做 6 天完成，公司需付 8700 元，由乙、丙两队合做 10 天完成，公司需付 9500 元，由甲、丙两队合做 7. 5 天完成，公司需付 8250 元. 若单独承包给一个工程队并且要求不超过 15 天完成全部工作，则公司付钱最少的队是【A】

A. 甲队

B. 丙队

C. 乙队

D. 甲或乙队

E. 乙或丙队

【解析】

设甲、乙、丙单独完成各需的天数为 x,y,z.

则$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}\\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{1}{7.5}\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=10\\ y=15\\ z=30\end{cases}$.

再设每天付给甲、乙、丙三队的费用分别是 a,b,c, 则$\begin{cases}6a+6b=8700\\ 10b+10c=9500\\ 7.5a+7.5c=8250\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=800\\ b=650\\ c=300\end{cases}$.

则若要甲做，需付 10×800＝8000 元；

若要乙做，需付 15×650＝9750 元；

若要丙做，需付 30×300＝9000 元.

所以用甲队公司付钱最少且工期不超过 15 天.

故选 A.

第四节 浓度问题

知识点讲解

溶液量＝溶质量＋溶剂量

溶质量＝浓度×溶液量

浓度＝溶质量/溶液量×100%＝溶质量/溶质量＋溶剂量×100%

题型考法

【真题题型 1】溶液混合

（一）命题特点

两种或两种以上的不同浓度的溶液混合配制成新溶液，求新溶液的浓度或混合前的两种溶液的浓度.

（二）解题思路

通过所取原溶液溶质的量等于成品溶质的量及溶液前后总质量不变这两个等量关系列方程.

【真题重现 1】（2016）将 2 升甲酒精和 1 升乙酒精混合得到丙酒精，则能确定甲、乙两种酒精的浓度.【E】

（1）1 升甲酒精和 5 升乙酒精混合后的浓度是丙酒精浓度的$\frac{1}{2}$倍.

（2）1 升甲酒精和 2 升乙酒精混合后的浓度是丙酒精浓度的$\frac{2}{3}$倍.

【解析】

根据题意，设甲、乙两种酒精的浓度分别为x，y，则混合后得到的丙酒精浓度为$\frac{2x+y}{3}$.

条件（1），根据条件得$\frac{x+5y}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+y}{3}$，化简得：$x=4y$. 无法确定$x$，$y$的值，即不能确定甲、乙两种酒精的浓度. 故条件（1）不充分.

条件（2），根据条件得$\frac{x+2y}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2x+y}{3}$，化简得：$x=4y$. 无法确定$x$，$y$的值，即不能确定甲、乙两种酒精的浓度. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

∵条件（1）和条件（2）等价. ∴无法确定x，y的值，即不能确定甲、乙两种酒精的浓度. 故条件（1）（2）联合起来也不充分.

综上，故选 E.

【真题重现 2】（2021）现有甲、乙两种浓度的酒精，已知用 10 升甲酒精和 12 升乙酒精可以配成浓度为 70%的酒精，用 20 升甲酒精和 8 升乙酒精可以配成浓度为 80%的酒精，则甲酒

精的浓度为【E】

A. 72%

B. 80%

C. 84%

D. 88%

E. 91%

【解析】

根据题意，设甲的浓度为 x，乙的浓度为 y.

$$\begin{cases}10x+12y=0.7\times(10+22)\\20x+8y=0.8\times(20+8)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=91\%\\y=52.5\%\end{cases}.$$

因此，甲的浓度为 91%，乙的浓度为 52.5%.

故选 E.

【模拟训练 1】甲、乙两种溶液混合可配制成浓度为 20%的溶液.【C】

（1）甲溶液是含盐 12.5%的 40 千克食盐溶液.

（2）乙溶液是含盐 26%的 50 千克食盐溶液.

【解析】

条件（1），只知道甲溶液的具体数据，不知道乙溶液的具体数据，无法计算. 故条件（1）不充分.

条件（2），只知道乙溶液的具体数据，不知道甲溶液的具体数据，无法计算. 故条件（2）不充分.

条件（1）和条件（2）单独都不充分，考虑条件（1）（2）联合.

条件（1）（2）联合可得：$\dfrac{40\times12.5\%+50\times26\%}{40+50}=0.2=20\%$.

故条件（1）（2）联合起来充分.

综上，故选 C.

【模拟训练 2】甲容器中有浓度为 8%的食盐水 300 克，乙容器中有浓度为 12.5%的食盐水 120 克. 往甲、乙两个容器分别倒入等量的水，使两个容器的食盐水浓度一样. 则要倒入____克水.【B】

A. 200

B. 180

C. 160

D. 140

E. 100

【解析】

设每个容器要倒入 x 克水.

甲容器中食盐的重量：300×80%＝24 克；乙容器中食盐的重量：120×12.5%＝15 克.

根据题意得：$\frac{24}{300+x}=\frac{15}{120+x}$，解得 x＝180.

故选 B.

【真题题型 2】反复稀释

（一）解题思路

代入相关公式进行计算分析：

已知溶液浓度为 x，溶液质量为 a，先倒出 b 溶液，再加入 b 溶剂，则浓度变为 $x(1-\frac{b}{a})$.

重复 n 次，浓度变为 $x(1-\frac{b}{a})^n$.

【真题重现】（2014）某容器中装满了浓度为 90%的酒精，倒出 1 升后用水将容器注满，搅拌均匀后又倒出 1 升，再用水将容器注满. 已知此时的酒精浓度为 40%，则该容器的容积是【B】

A. 2.5 升

B. 3 升

C. 3.5 升

D. 4 升

E. 4.5 升

【解析】

根据题意，设该容器的容积为 V 升.

则 90%·$(\frac{V-1}{V})^2$＝40%，解得 V＝3.

即该容器的容积是 3 升. 故选 B.

【模拟训练】有某种纯农药一桶，倒出 8 升后，用水补满，然后又倒出 4 升，再用水补满，此时测得桶中的纯农药和水之比是 18∶7，则桶的体积是____升.【B】

A. 45

B. 40

C. 35

D. 30

E. 25

【解析】

设桶的体积为 x 升，则根据浓度公式第二次倒出的纯农药为 $\frac{x-8}{x}\times 4$.

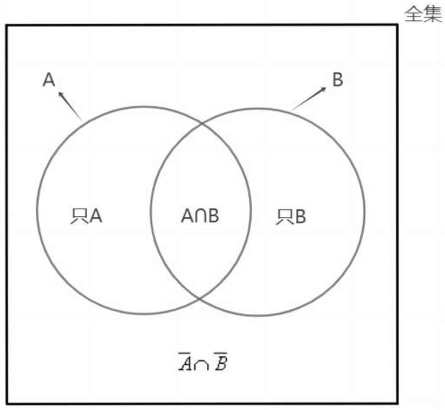
由题意得：$\dfrac{x-8-\dfrac{x-8}{x}\times 4}{x}=\dfrac{18}{25}$，解得 $x=40$（$x=\dfrac{20}{7}$舍去）.

故选 B.

第五节 集合问题

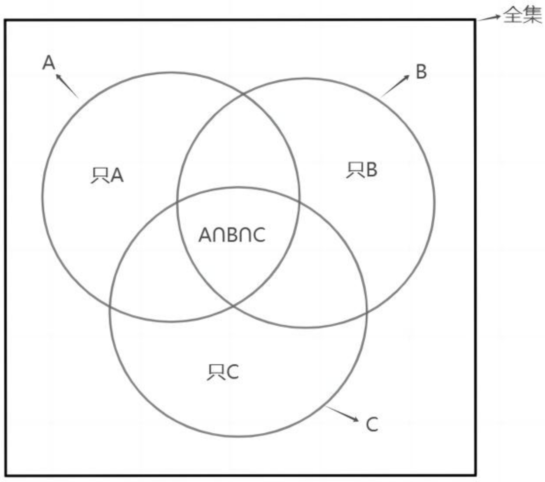
知识点讲解

1. 两集合问题



公式：$A\cup B=A+B-AB=\Omega-\overline{A}\overline{B}$

2. 三集合问题



公式：$A\cup B\cup C=A+B+C-A\cap B-B\cap C-A\cap C+A\cap B\cap C$.

题型考法

【真题题型 1】两集合问题

（一）解题思路

根据题意画出文氏图或套公式.

【真题重现】（2016）从 1 到 100 的整数中任取一个数，则该数能被 5 或 7 整除的概率为【D】

A. 0.02

B. 0. 14

C. 0. 2

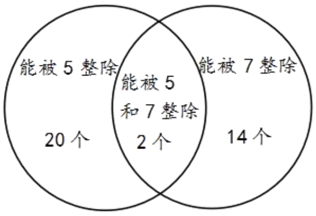
D. 0. 32

E. 0. 34

【解析】

根据题意，能被 5 或 7 整除的数有 3 种情况：能被 5 整除、能被 7 整除、既能被 5 整除又能被 7 整除.

1 到 100 的整数中能被 5 整除的有 20 个数. 1 到 100 的整数中能被 7 整除的有 14 个数. 其中既能被 5 整除又能被 7 整除的有 2 个数（35，70）. 可画图分析 3 种情况的关系.



因此，能被 5 或 7 整除的数有：20＋14－2＝32 个.

则其概率为 P＝32÷100＝0. 32.

故选 D.

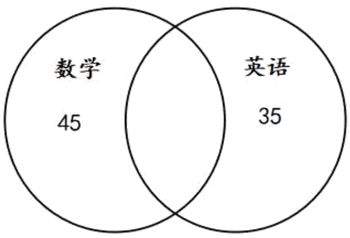
【模拟训练】某班共 60 名同学，已知其中参加数学竞赛的有 45 人，参加英语竞赛的有 35 人，则能确定参加数学竞赛但不参加英语竞赛的同学人数.【D】

（1）既参加数学竞赛又参加英语竞赛的同学有 30 人.

（2）数学和英语竞赛都没参加的有 10 人.

【解析】

根据题意可画图，如图所示.



条件（1），根据题意得，交集为 30 人，则参加数学竞赛但不参加英语竞赛的同学人数为 45－30＝15 人，即能确定. 故条件（1）充分.

条件（2），设两种竞赛都参加的人数是 x（即图中交集部分）.

则（45－x）＋（35－x）＋x＋10＝60⇒x＝30.

则参加数学竞赛但不参加英语竞赛的同学人数为 45－30＝15 人，即能确定. 故条件（2）充分.

综上，故选 D.

【真题题型 2】三集合问题

（一）解题思路

根据题意画出文氏图或套公式.

【真题重现】（2018）有 96 位顾客至少购买了甲、乙、丙三种商品中的一种，经调查：同时购买了甲、乙两种商品的有 8 位，同时购买了甲、丙两种商品的有 12 位，同时购买了乙、丙两种商品的有 6 位，同时购买了三种商品的有 2 位，则仅购买一种商品的顾客有【C】

A. 70 位

B. 72 位

C. 74 位

D. 76 位

E. 82 位

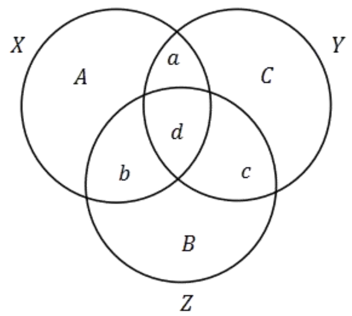
【解析】

根据题意，设 X∪Y∪Z 表示至少购买了甲、乙、丙三种商品中的一种的人数.

A，B，C 分别表示只购买甲、乙、丙三种商品中的一种的人数.

a，b，c 表示购买两种商品的人数，d 表示购买三种商品的人数.

综上可画图，如图所示.



由图可得：其中购买三种商品的人数重复计算三次需要减去两次.

则 X∪Y∪Z＝A＋B＋C＋（a＋b＋c）－2d ⇒96＝（A＋B＋C）＋（8＋12＋6）－2×2⇒ A＋B＋C＝74.

故选 C.

【模拟训练】联欢会上,有 24 人吃冰激凌、30 人吃蛋糕、38 人吃水果，其中既吃冰激凌又吃蛋糕的有 12 人，既吃冰激凌又吃水果的有 16 人，既吃蛋糕又吃水果的有 18 人，三样都吃的有 6 人，若所有人都吃了东西，则只吃一样东西的人数为【B】

A. 12 人

B. 18 人

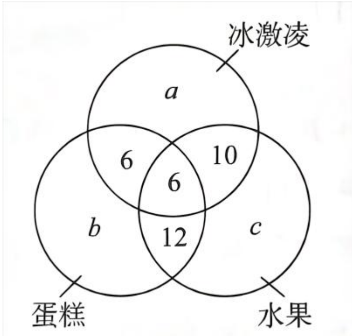
C. 24 人

D. 30 人

E. 32 人

【解析】

设 a 为只吃了冰激凌的人数，b 为只吃了蛋糕的人数，c 为只吃了水果的人数. 可画图：



故有：

$a=24-6-10-6=2$；

$b=30-6-12-6=6$；

$c=38-10-12-6=10$.

所以只吃一样东西的人数为 $a+b+c=2+6+10=18$.

故选 B.

第六节 不定方程问题

知识点讲解

以应用题为背景，在列出方程或方程组后，未知数的个数多于方程个数，常为以下两种类型：①有一个方程、两个未知数；②有两个方程、三个未知数，且方程或方程组最终可整理成 $ax+by=c$ 的形式.

题型考法

【真题题型 1】尾数分析法

（一）解题思路

当未知数前的系数或尾数中出现了“5”，“0”等特殊数字时，可根据整除的特征推算其他项的尾数.

【真题重现】（2022）某公司有甲、乙、丙三个部门，若从甲部门调 26 人到丙部门，则丙部门是甲部门人数的 6 倍，若从乙部门调 5 人到丙部门，则丙部门的人数与乙部门人数相等. 甲、乙两部门人数之差除以 5 的余数为【C】

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4

【解析】

设甲、乙、丙三个部门分别有 x、y、z 人.

根据题意可得 $\begin{cases}6(x-26)=z+26\\ y-5=z+5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x-156=z+26\\ y-5=z+5\end{cases}$，可整理成 $6x-y=172$ 的形式，即 $y=6x-172$，

因此甲、乙两部门人数之差为：$x-y=x-(6x-172)$，即 $x-y=-5x+172$.

由于 $-5x$ 一定是 5 的倍数，其除以 5 的余数为 0，又因为 172 除以 5 的余数为 2，则甲部门与乙部分人数之差除以 5 的余数为 2.

故选 C.

【模拟训练】某班有 34 人，坐两种条凳，大条凳可坐 5 人，小条凳可坐 3 人. 则应该搬 8 条凳子.【C】

（1）搬的凳子尽量少.

（2）搬的凳子正好坐满.

【解析】

条件（1）：搬的凳子尽量少，则应该多搬大条凳.

由于 $34\div5=6$ 条……4 人，故应该搬 $6+1=7$ 条凳子.

故条件（1）不充分.

条件(2)：设大条凳、小条凳的数量分别为 x，y. 故有 $5x+3y=34$.

由于 5x 的尾数是 0 或 5，34 的尾数是 4，故 3y 的尾数应为 4 或 9.

穷举可得，$\begin{cases}x=5\\y=3\end{cases}$或$\begin{cases}x=2\\y=8\end{cases}$.

即应该搬 8 条或 10 条凳子，故条件（2）不充分.

联立条件（1），（2），坐满的情况下，最少搬 8 条凳子，故联立充分.

故选 C.

【真题题型 2】倍数分析法

（一）解题思路

当其中两项是某个数的倍数时，第三项一定是这个数的倍数.

【真题重现】（2017）某公司用 1 万元购买了价格分别为 1750 元和 950 元的甲、乙两种办公设备，则购买的甲、乙办公设备的件数分别为【A】

A. 3，5

B. 5，3

C. 4，4

D. 2，6

E. 6，2

【解析】

根据题意，设甲、乙两种设备的件数分别为 x，y.

则有：$1750x+950y=10000$. 化简得：$35x+19y=200$.

由于 35x 是 5 的倍数，200 也是 5 的倍数，所以 19y 必是 5 的倍数.

由于 19 是质数，所以要使 19y 为 5 的倍数，则 y 应为 5 的倍数，结合选项，只有 $y=5$ 满足条件. 故选 A.

【模拟训练】某校一共有 100 名同学报考. 已知录取的男同学占报考的男同学人数的 20%，录取的女同学占报考的女同学人数的 12.5%，而且录取的女同学比男同学多，则一共录取了【B】

A. 13 人

B. 14 人

C. 15 人

D. 16 人

E. 17 人

【解析】

设最终录取的男、女同学人数分别为 x, y.

因为录取的男同学占报考的男同学人数的 20%，则报考的男同学有 $5x$ 人.

录取的女同学占报考的女同学人数的 12.5%，则报考的女同学有 $8y$ 人.

故有 $5x+8y=100$，且 $x<y$.

因为 $5x$ 和 100 都是 5 的倍数，故 $8y$ 也是 5 的倍数，即 y 是 5 的倍数.

穷举可得：$y=10$，$x=4$. 则一共录取了 14 人.

故选 B.

【真题题型 3】奇偶分析法

（一）解题思路

分析等式 $ax+by=c$ 两边各项 c、ax 和 by 的奇偶性.

【真题重现】（2016）利用长度为 a 和 b 的两种管材能连接成长度为 37 的管道.（单位：米）【A】

（1）$a=3$，$b=5$.

（2）$a=4$，$b=6$.

【解析】

根据题意得，设两种管材分别有 x，y，则有 $ax+by=37$.

条件（1），$a=3$，$b=5$ 代入 $ax+by=37$ 得：$3x+5y=37$.

x，y 均为正整数. 解得：$x_1=4$，$y_1=5$ 或 $x_2=9$，$y_2=2$.

即能连接成长度为 37 的管道. 故条件（1）充分.

条件（2），$a=4$，$b=6$ 代入 $ax+by=37$ 得：$4x+6y=37$.

因为等号左边 $4x+6y$ 为偶数，等号右边 37 为奇数. 所以没有符合 x，y 均为正整数的解.

故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

【模拟训练】某次数学竞赛准备将 22 支钢笔作为奖品发给获得一、二、三等奖的学生. 原计划一等奖每人发 6 支，二等奖每人发 3 支，三等奖每人发 2 支. 后又改为一等奖每人发 9 支，二等奖每人发 4 支，三等奖每人发 1 支，钢笔刚好分完，则得一等奖的学生有____人. 【A】

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

E. 5

【解析】

设一等奖有 x 人，二等奖有 y 人，三等奖有 z 人.

则有：$\begin{cases}6x+3y+2z=22\\9x+4y+z=22\end{cases}$，化简得：12x + 5y =22.

因为 12x 和 22 均为偶数，故 5y 也为偶数.

穷举得 x = 1，y = 2，z = 5. 所以得一等奖的学生有 1 人.

故选 A.

【真题题型 4】大系数突破法

（一）解题思路

若三个系数中，有一个系数远大于其余两个，则可以从大系数入手穷举.

【真题重现】（2021）某人购买了果汁、牛奶和咖啡三种物品，已知果汁每瓶 12 元，牛奶每盒 15 元，咖啡每盒 35 元，则能确定所买各种物品的数量.【A】

（1）总花费为 104 元.

（2）总花费为 215 元.

【解析】

设购买了果汁、牛奶和咖啡三种物品的数量分别为 x，y，z（x，y，z 都为正整数）.

条件（1），根据题意得：12x＋15y＋35z＝104.

从系数最大的 35z 开始代数试算：

①当 z＝1 时，解得：x＝2，y＝3.

②当 z＝2 时，无整数解.

即购买果汁 2 瓶，牛奶 3 盒和咖啡 1 盒总花费 104 元. 故条件（1）充分.

条件（2），根据题意得：12x＋15y＋35z＝215. 从系数最大的 35z 开始代数试算.

当 z＝1 时，解得：x＝5，y＝8 或 x＝10，y＝4，有两组解，因此无法确定物品具体购买的数量. 故条件（2）不充分.

综上，故选 A.

【模拟训练】老王在超市买了三种水果：苹果、橙子、草莓，都是整斤称重，它们每斤分别为 6 元、9 元、35 元，一共花费 89 元，则老王一共买了____斤水果.【A】

A. 8 或 9

B. 7 或 8

C. 8

D. 9

E. 9 或 10

【解析】

设苹果、橙子、草莓各买了 x，y，z 斤，一共花费 89 元，则有 6x + 9y + 35z = 89.

从系数最大的 35z 开始代数试算：

①$z=1$ 时，则 $6x+9y=54$，即 $2x+3y=18$.

因为 $3y$ 和 18 都是 3 的倍数，故 $2x$ 也是 3 的倍数，即 x 是 3 的倍数.

穷举可得 $x=3$，$y=4$ 或 $x=6$，$y=2$.

②$z=2$ 时，则 $6x+9y=19$. 因为 $6x$ 和 $9y$ 都是 3 的倍数，而 19 不是 3 的倍数，故方程无解.

综上可得，$x=3$，$y=4$，$z=1$ 或 $x=6$，$y=2$，$z=1$.

故三种水果共买了 $1+3+4=8$ 斤或 $1+6+2=9$ 斤.

故选 A.

第七节 最值问题

题型考法

【真题题型 1】二次函数最值

（一）解题思路

根据应用题的已知条件，设未知数，列出符合题干条件的一元二次函数表达式，根据一元二次函数性质求最值.

【真题重现】（2016）某商场将每台进价为 2000 元的冰箱以 2400 元销售时，每天售出 8 台. 调研表明，这种冰箱的售价每降低 50 元，每天就能多售出 4 台. 若要每天的销售利润最大，则该冰箱的定价应为【B】

A. 2200 元

B. 2250 元

C. 2300 元

D. 2350 元

E. 2400 元

【解析】根据“利润＝（售价－进价）×销售量”公式和题意，设冰箱降价 50x，每天售出冰箱 8＋4x，每天销售利润为 y. 则有：

$y=(2400-50x-2000)(8+4x)=-200(x-3)^2+5000.$

$\because y=-200(x-3)^2+5000$ 为顶点式且 $-200<0$.

∴函数开口向下，有最大值，在顶点处取得.

即 $x=3$ 时，y 取最大值. 则该冰箱的定价应为 $2400-50\times3=2250$（元）.

故选 B.

【模拟训练】某商场将进货单价为 18 元的商品，按每件 20 元销售时，每日可销售 100 件，如果每提价 1 元(每件)，日销售量就要减少 10 件，那么把商品的售价定为____时，才能使每天获得的利润最大.【C】

A. 22

B. 23

C. 24

D. 25

E. 26

【解析】设该商品的售价定为 x 元/件时，每天可获得 y 元的利润.

即每件提价 $x-20$ 元，每天销售量减少 $10(x-20)$ 件，

也就是每天销售量为 $[100-10(x-20)]$ 件，每件利润 $x-18$ 元.

根据题意，得 $y=(x-18)[100-(x-20)\times10]=-10(x-24)^2+360(20\leqslant x\leqslant30)$.

因为 $a=-10<0$，$20\leqslant24\leqslant30$，所以当 $x=24$ 时，y 有最大值为 360.

故选 C.

【真题题型 2】均值不等式求最值

（一）解题思路

如果题干条件中已知条件为和的定值，求积的最大值；或者已知条件为积的最值，求和的最小值，则一般是考查均值不等式$a+b\geq 2\sqrt{ab}$（a、$b>0$），使用均值不等式的口诀“一正二定三相等”.

【真题重现】（2015）设点 A（0，2）和 B（1，0），在线段 AB 上取一点 M（x，y）（0＜x＜1），则以 x，y 为两边长的矩形面积的最大值为【B】

A. $\frac{5}{8}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{1}{4}$

E. $\frac{1}{8}$

【解析】

根据题意，设线段 AB 所在的直线方程为 y＝kx＋b.

将点 A（0，2）和 B（1，0）代入直线方程可得$\begin{cases}2=0\cdot k+b\\0=1\cdot k+b\end{cases}$，解得$\begin{cases}b=2\\k=-2\end{cases}$.

则直线方程为 $y=-2x+2\Rightarrow 2x+y=2$（$0<x<1$，$y>0$）.

∵以 x，y 为两边长的矩形面积 $S=xy$，且 $2x+y\geqslant 2\sqrt{2xy}>0\Rightarrow(2x+y)^2\geqslant 8xy\Rightarrow\frac{1}{2}\geqslant xy$.

∴当且仅当 $2x=y$ 时$\Rightarrow x=\frac{1}{2}$，$y=1$，取得最大面积$\Rightarrow S=xy\leqslant\frac{1}{2}$.

即以 x，y 为两边长的矩形面积最大值为$\frac{1}{2}$.

故选 B.

【模拟训练 1】已知$x>0$，$y>0$，x，a，b，y成等差数列，x，c，d，y成等比数列，则$\frac{(a+b)^2}{cd}$的最小值是【D】.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 4

E. 6

【解析】

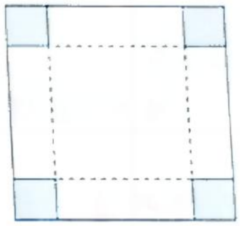
因为 x，a，b，y 成等差数列，所以 $x+y=a+b$.

又因为 x，c，d，y 成等比数列，所以 $xy=cd$.

因此 $\frac{(a+b)^2}{cd}=\frac{(x+y)^2}{xy}\geqslant\frac{(2\sqrt{xy})^2}{xy}=4$.

故选 D

【模拟训练 2】将一块边长为 a 的正方形铁皮，剪去四个角(四个全等的正方形)，如图所示，做成一个无盖的铁盒，要使其容积最大，则剪去的小正方形的边长为【D】



A. $\frac{a}{3}$

B. $\frac{a}{4}$

C. $\frac{a}{5}$

D. $\frac{a}{6}$

E. $\frac{a}{8}$

【解析】

设剪去的小正方形的边长为 x，则其容积为 $V=x(a-2x)^2$，$0<x<\frac{a}{2}$.

根据均值不等式，有:$V=\frac{1}{4}\cdot 4x\cdot(a-2x)\cdot(a-2x)\leq\frac{1}{4}\left[\frac{4x+(a-2x)+(a-2x)}{3}\right]^3=\frac{2a^3}{27}$.

当且仅当 $4x=a-2x$，即 $x=\frac{a}{6}$时等号成立，故当剪去的小正方形的边长为$\frac{a}{6}$时，铁盒的容积最大，为$\frac{2a^3}{27}$.

第八节 线性规划

知识点讲解

求线性目标函数在线性约束条件下的最大值或最小值问题，统称为线性规划问题.

题型考法

【真题题型 1】截距型：$ax+by$

（一）解题思路

第一步，根据题目写出限定条件对应的不等式组；

第二步，将不等式转化为方程，解出边界交点；

第三步，若交点为整数，则直接代入目标函数求出最值. 若交点不是整数，则讨论取整，然后再代入目标函数求出最值. 也可设 $ax+by=c$，即 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$，从而转化成求动直线截距的最值.

【真题重现】（2024）设非负实数 x，y 满足 $\begin{cases}2\le xy\le 8\\ \frac{x}{2}\le y\le 2x\end{cases}$，则 $x+2y$ 的最大值为____.【E】

A. 3

B. 4

C. 5

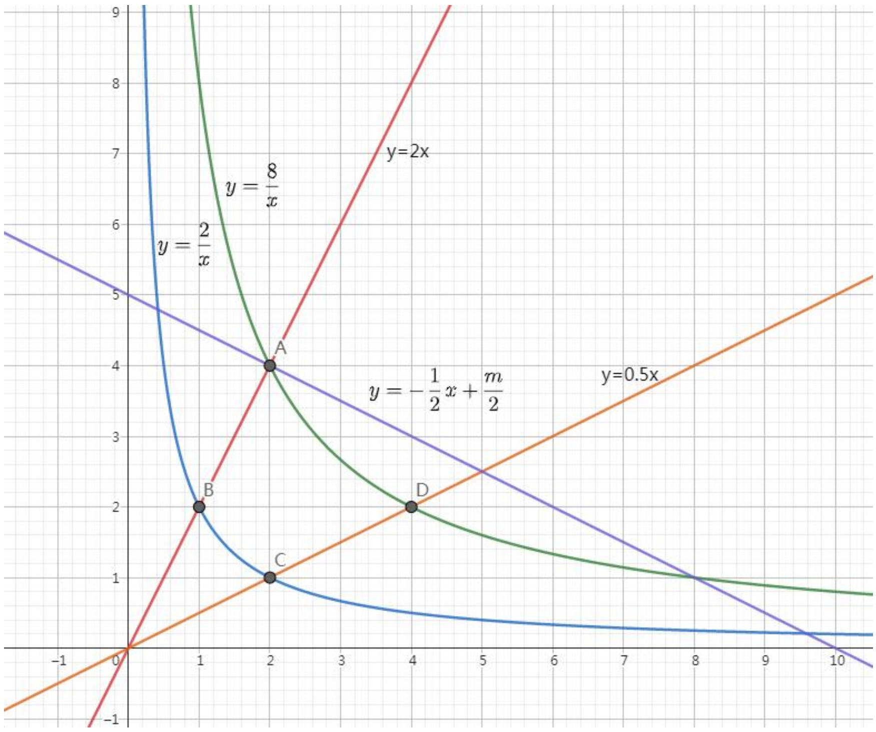
D. 8

E. 10

【解析】

因为设非负实数 x，y 满足 $\begin{cases}2\le xy\le 8\\ \frac{x}{2}\le y\le 2x\end{cases}$，即 x，y 的取值范围为 $\begin{cases}\frac{2}{x}\le y\le \frac{8}{x}\\ \frac{x}{2}\le y\le 2x\end{cases}$.

如图，在坐标轴中画出 x，y 满足的区域范围 $ABCD$，令 $x+2y=m$，则 $y=-\frac{x}{2}+\frac{m}{2}$，则求 $x+2y$ 的最大值即求 m 的最大值，所以问题就转化为求直线 $y=-\frac{x}{2}+\frac{m}{2}$ 在 x，y 满足的区域范围内平移时，直线 $y=-\frac{x}{2}+\frac{m}{2}$ 在 y 轴上截距 $\frac{m}{2}$ 的最大值.



由图可知，平移直线$y=-\frac{x}{2}+\frac{m}{2}$，当直线$y=-\frac{x}{2}+\frac{m}{2}$过点A（2,4）时，直线$y=-\frac{x}{2}+\frac{m}{2}$在y轴上的截距最大，把（2,4）代入直线方程，得$4=-\frac{2}{2}+\frac{m}{2}$，解得m=10.

故选E.

【模拟训练】设变量x、y满足约束条件$\begin{cases}2x-y\le 2\\ x-y\ge -1\\ x+y\ge 1\end{cases}$，则$z=2x+3y$的最大值为【A】

A. 18

B. 19

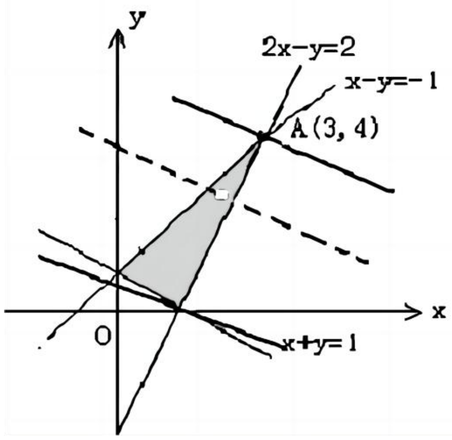
C. 20

D. 21

E. 22

【解析】

如下图画出可行域.



将目标函数 $z=2x+3y$ 化成 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$，在可行域求 z 的最大值. 即 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$ 的最大纵截距.

将目标函数平移找截距最值，$y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$ 在点 A(3,4)处的截距为最大值，故 $z_{max}=2\times3+3\times4=18$.

故选 A.

【真题题型 2】距离型：$(x-a)^2+(y-b)^2$

（一）解题思路

对于距离型目标函数 $(x-a)^2+(y-b)^2$，可转化成求定点 (a,b) 到动点 (x,y) 距离平方的最值.

其中，x^2+y^2 可以看作原点 $(0,0)$ 到动点 (x,y) 距离平方. 可从图像上更直观地看出最值点在何处取得.

【真题重现 1】（2020）设实数 x，y 满足 $|x-2|+|y-2|\leqslant2$，则 x^2+y^2 的取值范围是【B】

A. [2，18]

B. [2，20]

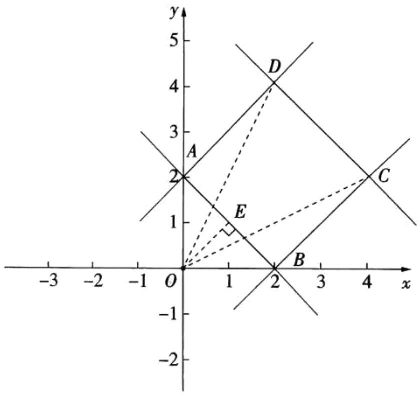
C. [2，36]

D. [4，18]

E. [4，20]

【解析】

根据题意可画图，$|x-2|+|y-2|\leqslant2$ 表示如图所示的四条直线围成的正方形区域（包含边界）.



AB 所在直线方程为：$2-x+2-y=2\Rightarrow y=-x+2$.

BC 所在直线方程为：$x-2+2-y=2\Rightarrow y=x-2$.

CD 所在直线方程为：$x-2+y-2=2\Rightarrow y=-x+6$.

DA 所在直线方程为：$2-x+y-2=2\Rightarrow y=x+2$.

x^2+y^2表示正方形区域的动点（x，y）到定点（0，0）距离的平方.

由图可知，$\left(x^2+y^2\right)_{min}=OE^2=\left(\sqrt{2}\right)^2=2$，$\left(x^2+y^2\right)_{max}=OD^2=OC^2=4^2+2^2=20$.

所以x^2+y^2的取值范围是[2，20].

故选 B.

【真题重现 2】（2023）设x，y是实数，则$\sqrt{x^2+y^2}$有最小值和最大值.【A】

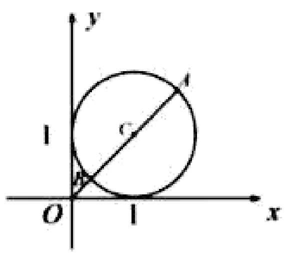
（1）$(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

（2）$y=x+1$.

【解析】

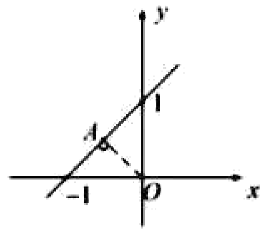
根据题意，设$d=\sqrt{x^2+y^2}$. 则d为点$(x，y)$到原点$O(0，0)$的距离.

条件（1），根据$(x-1)^2+(y-1)^2=1$可画图（圆C），如图所示.



点$(x，y)$为圆周上任意一点，到原点$O(0，0)$的距离的最大值是OA（$OA=\sqrt{2}+1$），最小值是OB（$OB=\sqrt{2}-1$）. 即$\sqrt{x^2+y^2}$有最小值和最大值，符合题干结论. 故条件（1）充分.

条件（2），根据$y=x+1$可画图，如图所示.



点$(x，y)$为直线上任意一点，到原点$O(0，0)$的距离的最小值为OA（$OA=\frac{\sqrt{2}}{2}$），没有最大值.即$\sqrt{x^2+y^2}$有最小值，没有最大值，不符合题干结论.故条件（2）不充分.

综上，故选A.

【模拟训练】已知$\begin{cases}x\geq 1\\ x-y+1\leq 0\\ 2x-y-2\leq 0\end{cases}$，则$x^2+y^2$的最小值是【E】

A. 1

B. 2

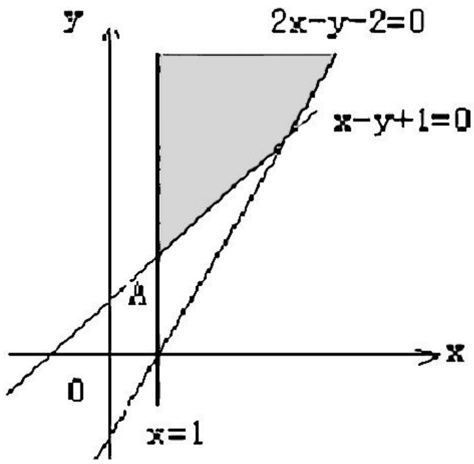
C. 3

D. 4

E. 5

【解析】

如下图，画出满足约束条件的可行域.



又因为x^2+y^2表示可行域内一点到原点的距离的平方.

由图易知可行域中点A（1，2）到原点的距离的平方最小，是满足条件的最优解.故$(x^2+y^2)_{\min}=1^2+2^2=5$.

故选E.